Chapitre

Calcul intégrale

Cours 2BECO

I Intégrale d'une fonction un intervalle

1 1 - Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

D Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.
On appelle intégrale de f de a à b, notée $\int_a^b f(x)dx$, le nombre réel $F(b)-F(a)$, où F une fonction primitive quelconque de f sur I.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

Remarque

- On note aussi : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$.
- Les réels a et b sont appelés les bornes de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.
- Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, la variable x est muette, donc elle peut être remplacée par toute autre variable :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt = \dots$$

- La notation $dx, dy, dt, \dots$, indique la variable par rapport à laquelle on intègre la fonction.

Exemple

1. Calculons l'intégrale : $\int_{-2}^2 x^2\,\mathrm{d}x$

On sait que $\begin{cases} \text{la fonction } x \longmapsto x^2 \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et } [-2;2] \subset \mathbb{R} \\ \text{la fonction } x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 \text{ est une primitive de la fonction } x \longmapsto x^2 \text{ sur } \mathbb{R} \end{cases}$

Donc $\int_{-2}^2 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{16}{3}$.

2. Calculons l'intégrale : $\int_1^e \frac{1}{x}dx$

On sait que $\begin{cases} \text{la fonction } x \longmapsto \dfrac{1}{x} \text{ est continue sur } [1;e] \\ \text{la fonction } x \longmapsto \ln(x) \text{ est une primitive de la fonction } x \longmapsto \dfrac{1}{x} \text{ sur }]0;+\infty[\end{cases}$

Donc $\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln|x|]_1^e = \ln(e)-\ln(1) = 1$.

3. Calculons l'intégrale : $\int_1^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

On sait que $\begin{cases} \text{la fonction } x \longmapsto \sqrt{x} \text{ est continue sur } [0;+\infty[\\ \text{la fonction } x \longmapsto \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \text{ est une primitive de la fonction } x \longmapsto \frac{1}{x} \text{ sur } [0;+\infty[\end{cases}$

Donc $\int_1^2 \sqrt{x}\,\mathrm{dx} = \left[\frac{2}{3}\sqrt{\mathrm{x}^3}\right]_1^2 = \frac{2}{3}\sqrt{2^3} - \frac{2}{3}\sqrt{1^3} = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

2 Propriétés d'intégrales

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a, b et c, et α un réel.

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
3. Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
4. $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
5. $\int_a^b (\alpha f)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$.

Exemple

1. Calculons l'intégrale : $\int_{-1}^2 \left|x^3\right| dx$

   On sait que la fonction $x \longmapsto x^3$ est continue sur $\mathbb{R}$, et que $\begin{cases} \forall x \in [-1;0], & x^3 \leq 0 \\ \forall x \in [0;2], & x^3 \geq 0 \end{cases}$

   Donc $\int_{-1}^2 \left|x^3\right| dx = \int_{-1}^0 -x^3 dx + \int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{-x^4}{4}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = -\frac{1}{4} + 4 = \frac{15}{4}$.

2. Calculons l'intégrale : $\int_0^2 3e^x - 4xdx$

   On sait que la fonction $x \longmapsto 3e^x - 4x$ est continue sur $\mathbb{R}$

   Donc $\int_0^2 3e^x - 4xdx = 3\int_0^2 e^x dx - 4\int_0^2 xdx = 3\left[e^x\right]_0^2 - 4\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = 3\left(e^2 - e^0\right) - 4\left(\frac{4}{2} - 0\right) = 3e^8$.

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$.

1. Si la fonction f est positive sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ et $\int_b^a f(x)dx \leq 0$.
2. Si la fonction f est négative sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)$ et $dx \leq 0$ $\int_b^a f(x)dx \geq 0$. .
3. Si la fonction f est supérieure à g $(f \geq g)$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.
4. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

II Remarques

Remarque

- Si la fonction f change son signe sur $[a;b]$, alors on ne peut pas conclure le signe de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.
- Réciproquement, si $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, alors la fonction f n'est pas forcément positive sur $[a;b]$. i.e : on a $\int_0^3 2x-1dx = 6$, mais la fonction $x \longmapsto 2x-1$ change son signe sur l'intervalle $[0;3]$.

III Méthodes de calcul d'intégrales

1 Primitive d'une fonction

Expression de f	Expression de primitives	Définie sur
a	$ax+c$	$\mathbb{R}$
$(n \in \mathbb{N}) \quad x^n$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$(n \in \mathbb{N}-\{-1\}) \quad \frac{1}{x^n}=x^{-n}$	$\frac{x^{-n+1}}{-n+1}+c$	Tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}-\{0\}$
$(r \in \mathbb{Q}-\{-1\}) \quad x^r$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}+c$	$\mathbb{R}_+^*$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)+c$	Tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)+c$	Tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}-\{0\}$
e^x	e^x+c	$\mathbb{R}$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert+c$	Tout intervalle où u est dérivable et ne s'annule pas
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}+c$	Tout intervalle où u est dérivable
$(r \in \mathbb{Q}-\{-1\}) \quad u'(x)\times u^r(x)$	$\frac{u^{r+1}(x)}{r+1}+c$	Tout intervalle où u est dérivable et u^r est définie

Application

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+1}dx$
2. $\int_e^{2e} \frac{\ln(x)}{x}dx$
3. $\int_{-1}^1 \frac{-2x^2}{x^3+3}dx$

4 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(x)dx$
5 $\int_{-2}^{1} \frac{1}{\sqrt{x+3}}dx$
6 $\int_0^{\pi} \cos(3x-5)dx$
7 $\int_1^{2} e^{-x} - \frac{1}{x^2}dx$
8 $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \cos(x)e^{\sin(x)}dx$
9 $\int_0^{1} \frac{2e^{3x}-e^{x}-5}{e^{x}}dx$
10 $\int_0^{-\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)-\sin^2(x)dx$
11 $\int_0^{1} \frac{e^{x}}{(e^{x}+1)^2}dx$
12 $\int_0^{-\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cdot\sin(x)dx$

2 Intégration par parties

Propriété

a et b étant deux réels d'un intervalle I.
Soit u et v deux fonctions dérivables sur I tels que u' et v' sont continues sur I.

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)\cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Application

Calculer, en utilisant une intégration par parties, les intégrales suivantes :

1 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)dx.$

On pose $\begin{cases} u'(x) = \sin(x) \\ v(x) = x \end{cases}$ Alors $\begin{cases} u(x) = -\cos(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

Donc $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)dx = [-x\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x)dx = 0 + [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

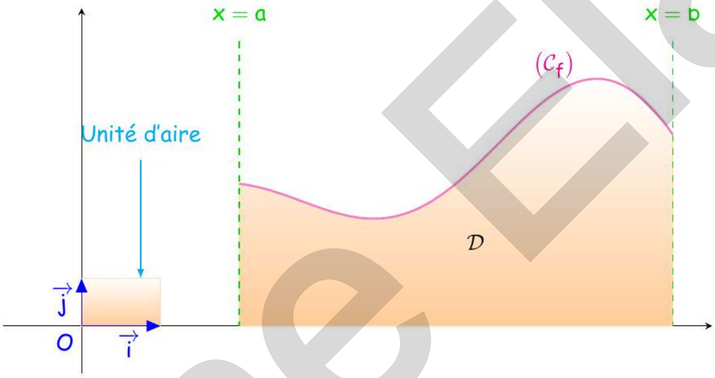
2 $I_2 = \int_{-1}^{0} x\sqrt{1-x}dx.$
3 $I_3 = \int_1^{2} (2-x)e^{-x}dx.$
4 $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2(x)}dx.$
5 $I_5 = \int_2^{e} x\ln(x-1)dx.$

IV Interprétation géométrique d'intégrale

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$

V Cas d'une fonction positive

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$.
Si f est une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a;b]$, alors l'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le nombre positif $\int_a^b f(x)dx$ exprimé en l'unité d'aire. L'unité d'aire est $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$.



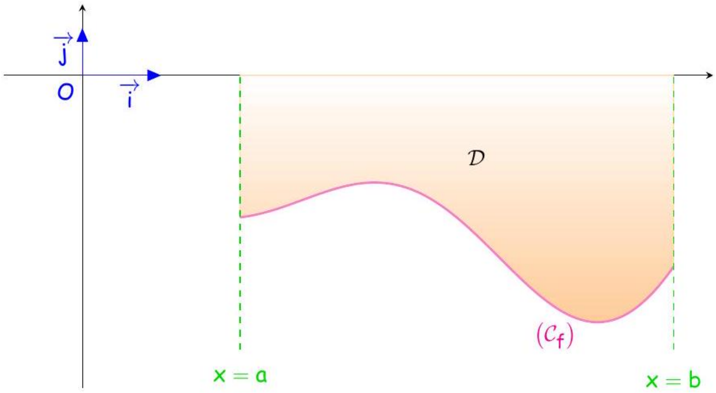
Application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^3+6}{2}$
On note $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{i}\| = 1$ cm.

1. Montrer que f est strictement positive sur $[-1;2]$.
2. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.

1 Cas d'une fonction négative

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$.
Si f est une fonction continue et négative sur l'intervalle $[a;b]$, alors - f est positive sur $[a;b]$.
Dans ce cas, l'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le nombre positif $\int_a^b -f(x)dx$ exprimé en unité d'aire.



Application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} - x$
On note $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1.5$ cm et $\|\vec{i}\| = 2$ cm.

1. Montrer que f est strictement négative sur $[1;2]$.
2. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

2 Valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle

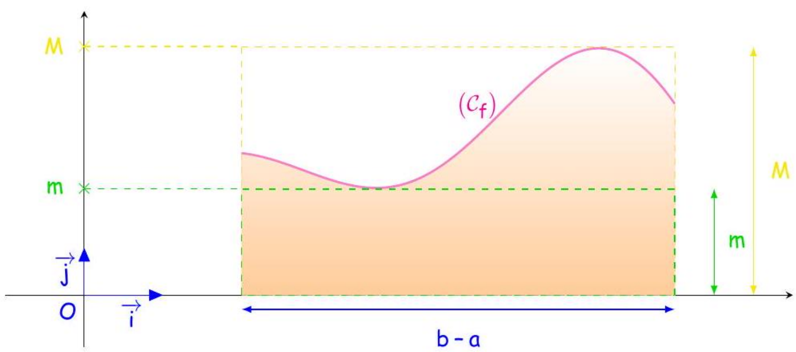
Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.

1. S'il existe deux réels M et m tels que pour tout x de $[a;b]$: $m \leq f(x) \leq M$
   Alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.
2. S'il existe un réel k tel que pour tout x de $[a;b]$: $|f(x)| \leq k$
   Alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq k|b-a|$.

Interprétation géométrique

On suppose que f est continue et positive sur $[a;b]$ et que : $0 < m \leq f(x) \leq M$.
La première propriété nous dit que l'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est comprise entre l'aire du rectangle (vert) de côtés M et $(b-a)$ et l'aire du rectangle (jaune) de côtés m et $(b-a)$.



D Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, où $a \neq b$.
On appelle la valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$, le nombre réel $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

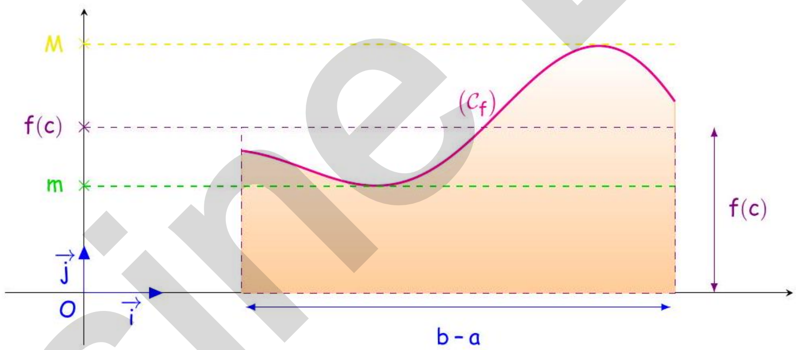
VI Théorème

T Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, où $a \neq b$.
Il existe un réel c de $[a;b]$ tel que $f(c) = \mu$, ou encore $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)dx$.

Interprétation géométrique

On suppose que f est continue et positive sur $[a;b]$ et que : $0 < m \leq f(x) \leq M$.
L'aire du rectangle (violet) de côtés $f(c)$ et $(b-a)$ est égale à l'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
Autrement dit, la valeur moyenne μ de f correspond à la hauteur du rectangle (violet).



VII Applications

Application

Dans chaque cas ci-dessous, calculer la valeur moyenne mu de f sur l'intervalle I :

1. $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$; $\quad I = [-1;0]$.
2. $f(x) = (x-1)e^x$; $\quad I = [0;1]$.

VIII Applications

1 Calcul d'aire

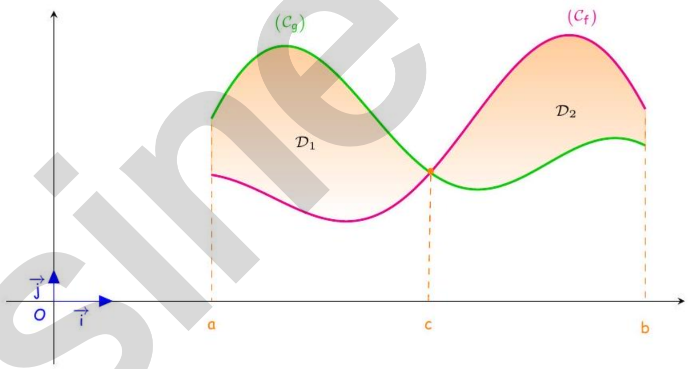
Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
L'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à $\int_a^b |f(x)|dx$ exprimé en unité d'aire.

Interprétation géométrique

Pour calculer l'aire d'un domaine définie par une fonction de signe quelconque, il faut déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est positive et ceux sur lesquels elle est négative, puis on applique la relation de Chasles.
On suppose que la fonction f change son signe sur l'intervalle $[a;b]$, comme l'illustre le graphe ci-dessous.
On a donc :

$$S_{\mathscr{D}} = \int_a^b |f(x)|dx = +\int_a^{c_1} f(x)dx - \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx - \int_{c_3}^{b} f(x)dx \times \|\vec{i}\|x\|\vec{j}\|.$$



Application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-2x$, et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1.5$ cm et $\|\vec{i}\| = 2$ cm

1. Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0;2]$.
2. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine délimité par $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=0$ et $x=2$.

Propriété

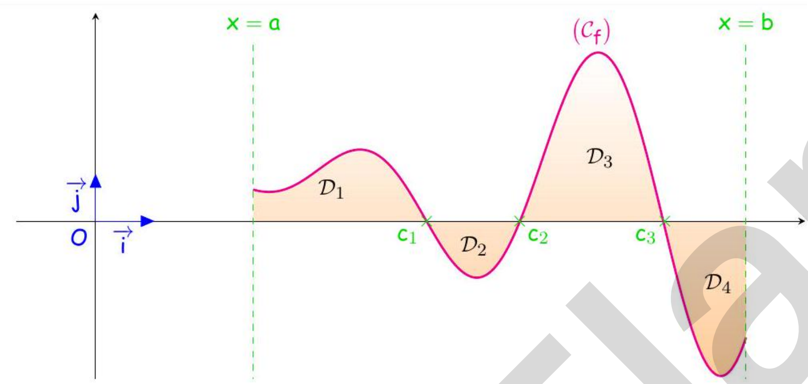
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$.
L'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe représentative de f, la courbe représentative de g et les deux droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$ exprimé en unité d'aire.

Interprétation géométrique

On suppose, comme l'illustre le graphe ci-dessous, qu'il existe un réel c appartenant à $[a;b]$ tel que :

1. La fonction f est inférieure à g sur l'intervalle $[a;c]$ ie : $\forall x \in [a;c] \quad f(x) \leq g(x)$.
2. La fonction f est supérieure à g sur l'intervalle $[c;b]$ ie : $\forall x \in [a;c] \quad f(x) \geq g(x)$.

Donc $S_{\mathscr{D}} = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = -\int_a^b f(x) - g(x)dx + \int_a^b f(x) - g(x)dx \times \|\vec{i}\|x\|\vec{j}\|$.



Application

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité $\|\vec{i}\| = 2$ cm.
Soit f et g les fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$

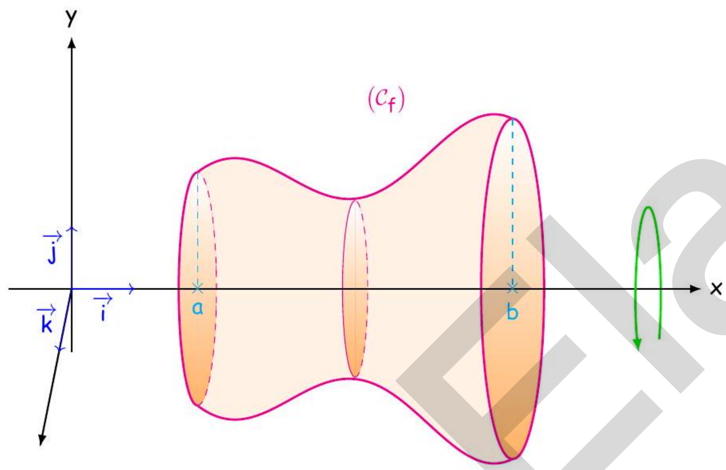
1. Tracer les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
2. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine délimité par $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$

2 Calcul de volume

L'espace est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, et $\mathscr{D}$ la partie du plan $(0,\vec{i},\vec{j})$ délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=a$ et $x=b$.
Le volume du solide de révolution engendré par la rotation de $\mathscr{D}$ autour de l'axe des abscisses sur $[a;b]$, exprimé en unité de volume, est égale à $\mathscr{V}=\pi\int_a^b(f(x))^2dx$.
L'unité de volume est $\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|\times\|\vec{k}\|$.



Application

On se place dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j};\vec{k})$ de l'espace d'unité $\|\vec{i}\|=1$ cm.
Soit f la fonction définie sur $[\ln(2);\ln(3)]$ par : $f(x)=e^x$, et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=\ln(2)$ et $x=\ln(3)$
2. Calculer, en cm^3, le volume du solide de révolution engendré par la rotation $\mathscr{D}$ autour de l'axe des abscisses.

1.Chapter 1 Calcul intégrale