

Puissance d'un nombre relatif

Activité

- 1 Observer le produit suivant : $3 \times 3 \times 3$
Combien y-a-t'il de facteurs dans ce produit ?
Comment sont-ils ces facteurs ?
Complète : $3 \times 3 \times 3$ est le produit de facteurs égaux à
- 2 Dans le produit $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$
Combien y-a-t'il de facteurs dans ce produit ?
Comment sont-ils ces facteurs ?
Complète : $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ est le produit de facteurs égaux à
- 3 Écris le produit de 100 facteurs égaux à 3
Quel est l'obstacle que tu as trouvé dans cette écriture ?
Pour passer de cet obstacle on écrit ce produit sous la forme 3^{100}
 3^{100} est la puissance du nombre 3 et se lit 3 à la puissance 100
- 4 Écris le produit de 25 facteurs égaux à 3
- 5 En utilisant l'écriture précédente sous forme d'une puissance, écris le produit de 15 facteurs égaux à (-2)

Activité

On considère le tableau suivant :

1	2	3
2	4	8
4	16	
7	8	9

- 1 Compléter le tableau après avoir trouver la règle de remplissage des trois premier cases
- 2 Écrire chaque nombre à l'aide du nombre qui le précède
- 3 Si le nombre 8 s'écrit sous la forme 2^3 , alors comment peut-on exprimer les autres nombres de la même façon ?
- 4 Dans l'écriture 2^3 , le nombre 3 s'appelle l'**exposant** de la **puissance** (2^3)
Quelle est la puissance du nombre 2 dans le nombre situé dans la case 7
- 5 Remplir à nouveau le tableau en utilisant cette fois les puissances du nombre (-2)

Puissance d'un nombre relatif

On considère le produit suivant : $A = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

Ce produit comporte 5 facteurs égaux à 2

On appelle ce produit **la cinquième puissance** du nombre 2, et on écrit : 2^5

Le nombre 2^5 se lit : 2 à la puissance 5, ou encore 2 exposant 5

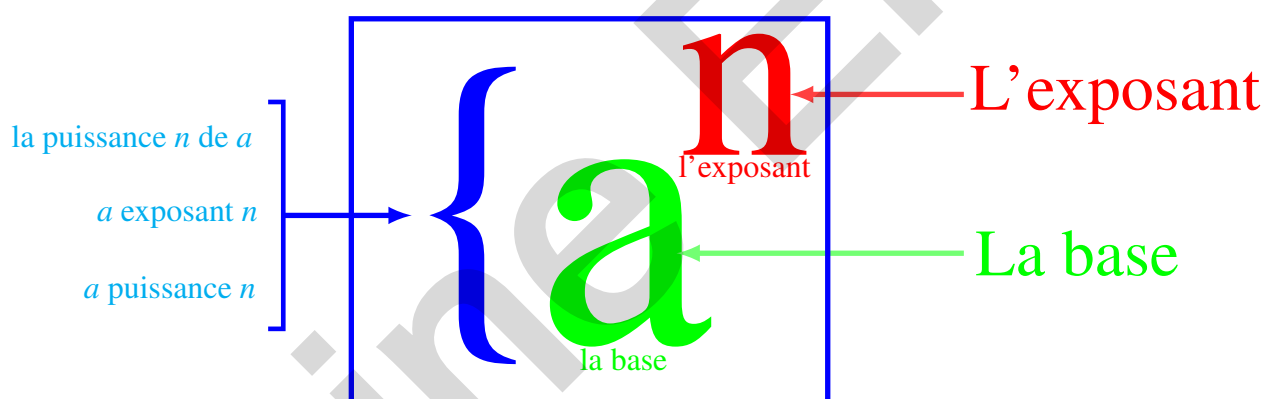
Définition

Soit a un nombre décimal relatif non nul et n un nombre entier positif supérieur à 1

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

De plus : $a^1 = a$ et pour $a \neq 0$ on a : $a^0 = 1$

* L'écriture a^n :



* Vocabulaire

Si a est un nombre relatif non nul, alors :

☆ a^n se lit " a à la puissance n " ou encore " a exposant n "

☆ Le nombre n est appelé " exposant "

☆ a^2 se lit : a exposant 2, ou a puissance 2, ou a au carrée

☆ a^3 se lit : a exposant 3, ou a puissance 3, ou a au cube

Remarque

La puissance 0^0 **n'existe pas**

EXEMPLES

$$\Rightarrow 5^2 = 5 \times 5 = 25$$

$$\Rightarrow 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

$$\Rightarrow (-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$$

$$\Rightarrow (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

$$\Rightarrow -3^2 = -3 \times 3 = -9$$

$$\Rightarrow -4^3 = -4 \times 4 \times 4 = -64$$



En l'absence de parenthèses, les puissance ont priorité sur les multiplications et les divisions

Application

Calculer les puissance suivantes

$$\star 2^3$$

$$\star 1^{12}$$

$$\star (-1)^4$$

$$\star (-544)^0$$

$$\star 0^{45}$$

$$\star (4)^0$$

Solution

$$\star 2^3 = 8$$

$$\star 1^{12} = 1$$

$$\star (-1)^4 = 1$$

$$\star (-544)^0 = 1$$

$$\star 0^{45} = 0$$

$$\star (4)^0 = 1$$



Signe d'une puissance

Activité

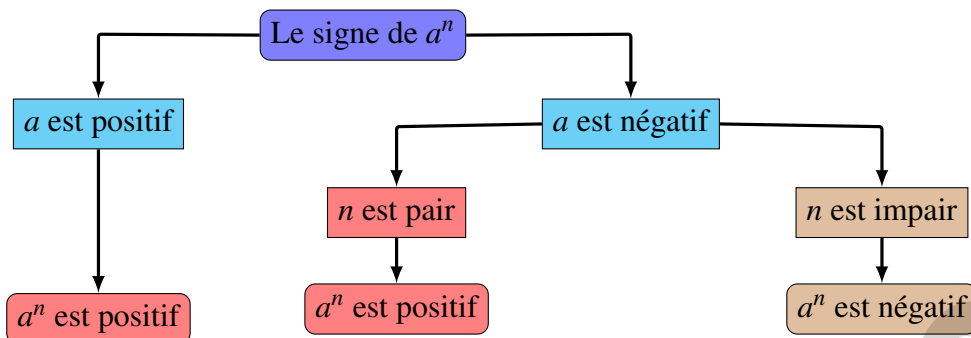
1 Recopier et compléter le tableau suivant

n	1	2	3	4	5	6
$(0.1)^n$						
$(-1)^n$						
$(-2)^n$						

2 En déduire les conditions pour que a^n soit négative, a étant un nombre relatif et n un nombre entier naturel

Règle

Une puissance est **négative** si sa base est **négative** et son exposant est impair
Et elle positive dans les autres cas



EXEMPLES

- ★ La puissance $(-11)^4$ est positif car la base -11 est négatif et l'exposant 4 est positif
- ★ La puissance $(-7)^5$ est négatif car la base -7 est négatif et l'exposant 5 est impair
- ★ La puissance 7^{33} est positif car la base 7 est positif
- ★ 5^2 est positif car la base 5 est positif



★ Si a est un nombre décimal et n un nombre entier naturel **pair**
 Alors $(-a)^n = a^n$

Application

Déterminer le signe des puissances suivantes :

$$(-3)^2 \quad ; \quad (-2)^{15} \quad ; \quad 5^3 \quad ; \quad (-7)^{15}$$

Solution

$(-3)^2$: Positif ; $(-2)^{15}$: Négatif ; 5^3 : Positif ; $(-7)^{15}$: Négatif



Opérations sur les puissances

1

Produit de deux puissances de même base

Activité

Observer l'exemple suivant et compléter :

$$\begin{aligned}
 2^4 \times 2^3 &= \left(\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{4 \text{ facteurs}} \right) \times \left(\underbrace{2 \times 2 \times 2}_{3 \text{ facteurs}} \right) & 3^4 \times 3^5 &= \left(\underbrace{\dots}_{\dots \text{ facteurs}} \right) \times \left(\underbrace{\dots}_{\dots \text{ facteurs}} \right) \\
 &= \left(\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{4+3 \text{ facteurs}} \right) & &= \left(\underbrace{\dots}_{\dots + \dots \text{ facteurs}} \right) \\
 &= 2^7 & &= \dots \\
 3^4 \times 3^5 &= \left(\underbrace{\dots}_{\dots \text{ facteurs}} \right) \times \left(\underbrace{\dots}_{\dots \text{ facteurs}} \right) a^m \times a^n & &= \left(\underbrace{\dots}_{\dots \text{ facteurs}} \right) \times \left(\underbrace{\dots}_{\dots \text{ facteurs}} \right) \\
 &= \left(\underbrace{\dots}_{\dots + \dots \text{ facteurs}} \right) & &= \left(\underbrace{\dots}_{\dots + \dots \text{ facteurs}} \right) \\
 &= \dots & &= \dots
 \end{aligned}$$

Règle

Soit a un nombre décimal relatif non nul, et m et n deux nombres entiers relatifs, alors

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

EXEMPLES

$$\star 5^5 \times 5^8 = 5^{5+8} = 5^{13}$$

$$\star 12^3 \times 12^5 = 12^{3+5} = 12^8$$

$$\star (-21)^2 \times (-21)^7 = (-21)^{2+7} = (-21)^9$$

$$\star (-12)^4 \times (-12)^{15} = (-12)^{4+15} = (-12)^{19}$$

Application

Écrire sous forme d'une puissance :

$$\star A = 2^4 \times 2^6$$

$$\star B = (-4.5)^4 \times (-4.5)^3 \times (-4.5)^2$$

$$\star C = (-4)^7 \times (-4)^4$$

$$\star D = 9^3 \times 9^2 \times 9$$

Solution

$$\star A = 2^{10}$$

$$\star B = 9^6$$

$$\star C = (-4)^{11}$$

$$\star D = (-4.5)^9$$

2**Produit de deux puissances de même exposant****Activité**

Soient a et b deux nombres décimaux relatifs tel que : $a = 2$ et $b = 3$

Compléter le tableau suivant :

$n \nabla$	a^n	b^n	$a^n \times b^n$	$a \times b$	$(a \times b)^n$
2					
3					
-2					

Que remarquez-vous ?

Règle

Soient a et b deux nombres décimaux relatifs non nul, et n un nombre entier relatif
Alors

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

EXEMPLES

$$\star 5^5 \times 6^5 = (5 \times 6)^5 = 30^5$$

$$\star 2^3 \times 10^3 = (2 \times 10)^3 = 20^3$$

$$\star (-3)^2 \times (-2)^2 = ((-3) \times (-2))^2 = 6^2$$

$$\star (-12)^4 \times (-2)^4 = ((-12) \times 2)^4 = (-24)^4$$

Application

Écrire sous forme d'une puissance :

$$\star A = 2^3 \times 6^3$$

$$\star B = (-4)^2 \times (-5)^2$$

$$\star C = (11)^7 \times (12)^7$$

$$\star D = 9^3 \times (-3)^3$$

Solution

$$\star A = 12^3$$

$$\star B = 20^2$$

$$\star C = 132^7$$

$$\star D = (-27)^3$$

3

Quotient de deux puissances de même base

Activité

Observer l'exemple suivant et compléter :

$$\begin{aligned} \frac{2^5}{2^3} &= \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} \\ &= 2 \times 2 \\ &= 2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3^4}{3^3} &= \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3} \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{10^5}{10^3} &= \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a^m}{a^n} &= \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Règle

Soit a un nombre décimal relatif non nul, et m et n deux nombres entiers positifs avec $m > n$, alors

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

EXEMPLES

$$\star \frac{6^5}{6^3} = 6^{5-3} = 6^2$$

$$\star \frac{3^{11}}{3^2} = 3^{11-2} = 3^9$$

$$\star \frac{(-4)^7}{(-4)^3} = (-4)^{7-3} = (-4)^4$$

$$\star \frac{(-1)^5}{(-1)^3} = (-1)^{5-3} = (-1)^2$$

Application

Écrire sous forme d'une puissance :

$$\star A = \frac{4^7}{4^3}$$

$$\star B = \frac{6^6}{6^2}$$

$$\star C = \frac{(-3)^{13}}{(-3)^7}$$

$$\star D = \frac{(-7)^7}{(-7)^6}$$

Solution

$$\star A = 4^4$$

$$\star B = 6^4$$

$$\star C = (-3)^6$$

$$\star D = (-7)^1$$

4**Quotient de deux puissances de même exposant****Activité**

Soient a et b deux nombres décimaux relatifs tel que : $a = 8$ et $b = 2$

Compléter le tableau suivant :

$n \blacktriangledown$	a^n	b^n	$\frac{a^n}{b^n}$	$\frac{a}{b}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n$
2					
3					
-2					

Que remarquez-vous ?

Règle

Soient a et b deux nombres décimaux relatifs non nul, et n un nombre entier relatif
Alors

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

EXEMPLES

$$\star \frac{3^7}{19^7} = \left(\frac{3}{19}\right)^7$$

$$\star \frac{3^{11}}{9^{11}} = \left(\frac{3}{9}\right)^{11} = \left(\frac{1}{3}\right)^9$$

$$\star \frac{(-4)^5}{2^5} = \left(\frac{-4}{2}\right)^5 = (-2)^5$$

$$\star \frac{6^3}{(-3)^3} = \left(\frac{6}{-3}\right)^3 = (-2)^3$$

Application

Écrire sous forme d'une puissance :

$$\star A = \frac{5^7}{4^7}$$

$$\star B = \frac{11^{17}}{121^{17}}$$

$$\star C = \frac{(-3)^4}{(-5)^4}$$

$$\star D = \frac{(-2)^3}{(5)^3}$$

Solution

$$\star A = \left(\frac{5}{4}\right)^7$$

$$\star B = \left(\frac{1}{11}\right)^{17}$$

$$\star C = \left(\frac{3}{5}\right)^4$$

$$\star D = \left(\frac{-2}{5}\right)^3$$

5

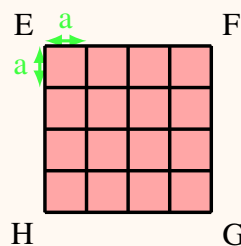
Puissance d'une puissance

Activité

❶ Si 3^2 et 3^3 sont les dimensions d'un rectangle
Exprimer l'aire de ce rectangle sous forme d'une puissance de 3

❷ ➔ Calculer l'aire du carré $EFGH$, ci-contre, de deux façons

➔ En déduire que : $(4a)^2 = 4^2 \times a^2$



❸ ➔ Montrer que : $(2^2)^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

➔ En déduire que : $(2^2)^3 = 2^6$

Règle

Soit a un nombre décimal relatif non nul et m et n deux nombres entiers positifs, alors :

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

EXEMPLES

$$\star [(-3)^5]^3 = (-3)^{5 \times 3} = (-3)^{15}$$

$$\star (5^6)^2 = 5^{6 \times 2} = 5^{12}$$

Application

Écrire sous forme d'une puissance :

☛ $A = (2^4)^3$

☛ $B = (3^5)^2$

☛ $C = [(-2)^3]^6$

☛ $D = [(-6)^2]^4 \times [(0.5)^4]^2$

Solution

☛ $A = 2^{12}$

☛ $B = 3^{10}$

☛ $C = (-2)^{18}$

☛ $D = (-3)^8$

IV Puissance de 10**Règle**Soit n un nombre entier naturel non nul

$$10^n = \underbrace{1000 \dots 0}_{n \text{ zéros}}$$

EXEMPLES

☛ $10^3 = 1000$

☛ $10^7 = 10000000$

☛ $10^2 = 100$

☛ $10^5 = 100000$

Application

Écrire en utilisant les puissance de 10

☛ $A = 10000$

☛ $B = 100$

☛ $C = (70 + 30) \times 100000$

☛ $D = (250 \times 40) \times 10000$

Solution

☛ $A = 10^4$

☛ $B = 10^2$

☛ $C = 10^7$

☛ $D = 10^8$

V**La notation (Écriture) scientifique d'un nombre décimal****Activité**Calculer le produit 45000×1500000 au moyen d'une calculatrice puis sans calculatriceQue signifie l'écriture $6,75E10$ ou l'écriture $6,75 \times 10^{10}$ affiché par la calculatrice ?

Définition

Soit b un nombre décimal tel que $b = a \times 10^n$ ou $1 \leq a < 10$ et n un nombre entier relatif $a \times 10^n$ est la notation scientifique, ou l'écriture scientifique de b

EXEMPLES

- ➡ $912000 = 9.12 \times 10^5$ est la notation scientifique de 912000
- ➡ $0.0235 = 2.35 \times 10^{-2}$ est la notation scientifique de 0.0235

Application

Donner la notation scientifique des nombres suivant :

☛ $A = 5 \times 10^3 - 2 \times 10^2$

☛ $B = 64.5 \times 10^8 + 631 \times 10^7$

☛ $C = 300\,000\,000$

☛ $D = 602\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$

Solution

☛ $A = 4.8 \times 10^3$

☛ $B = 1.276 \times 10^{10}$

☛ $C = 3 \times 10^8$ (En m/s c'est la vitesse de la lumière)

☛ $D = 6.02 \times 10^{23}$ (C'est le nombre d'atome dans un gramme d'Hydrogène)