Chapitre

Limites

Exercice

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-4}$.

1 Quel est l'ensemble de définition de f ?

2 Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice

1 Calculer la limite en $x_0=0$ de la fonction f dans les cas suivants :

a $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{1}{x}$

b $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1}-1}$

2 Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction f dans les cas suivants :

a $f(x)=\sqrt{a+x}-\sqrt{x}$ tel que $a\in\mathbb{R}$

b $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^2+1}}$

c $f(x)=\sqrt{x^2+x}-x$

d $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$

3 Calculer la limite en $-\infty$ de la fonction f dans les cas suivants :

a $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-3x+2}$

b $f(x)=\sqrt{x^2+2x}+x$

Exercice

Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-\sqrt{4x^2+2x}}{x(x-2)}$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-\sqrt{4x^2+2x}}{x(x-2)}$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-\sqrt{4x^2+2x}}{x(x-2)}$

Exercice

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = 2x + b \text{ si } x > 1 \\ f(x) = x^2 + x \text{ si } x \leq 1 \end{cases}$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Déterminer b pour que la fonction f admet une limite en $x_0 = 1$.

Exercice

1. Démontrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1$.
2. Soient m, n des entiers positifs. Étudier $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$.
3. Démontrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2} - 1) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice

Trouver les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2}$
2. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{-x^2 + x + 2}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x-2}{4x-3}}$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 2\sqrt{x}$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$
6. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x\sqrt{x+1} - 6}{x - 3}$
7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$
8. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$
9. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x\right)$
10. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 3} + x\right)$
11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x+2}}$

12 $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x+4}-3}$

13 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x}$

14 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

15 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x+1\right)$

16 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$

17 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4+x^3-7x^2+8x-12}{x-2}$

18 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{2016}-1}{x-1}$

19 $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{5+x}-2}{x+1}$

20 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}$

Exercice

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2|x|}{x}$

2 $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+2|x|}{x}$

3 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$

5 $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$

6 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^n-1} \quad \left(n\in\mathbb{N}\right)$

7 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}$

8 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+3}{x-3\sqrt{x}+2}$

9 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{-x}}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

10 $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x<-1}} \frac{-(x+1)E(x)}{x^2+3x+2}$

11 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(4x)-\cos(2x)}{3x^2}$

12 $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x>\frac{\pi}{2}}} \frac{\tan(x)-1}{\tan^2(x)+3}$

13 $\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n}$

14 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x(\cos 2x - \cos x)}$

15 $\lim\limits_{x \to \alpha^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}$,

16 $\lim\limits_{x \to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$,

17 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^4}{1+x^{\alpha}\sin^2 x}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice

Calculer la limite en $x_0 = 0$ de la fonction f dans les cas suivants :

1 $f(x) = \frac{\sin ax}{\sin bx} \quad (b \neq 0)$

2 $f(x) = \frac{\tan ax}{\tan bx} \quad (b \neq 0)$

3 $f(x) = \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

4 $f(x) = \frac{x^2}{\tan^2 x - 2\sin^3 x}$

5 $f(x) = \frac{\sin x - \tan x}{x - x\cos x}$

6 $f(x) = \frac{\tan 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$

7 $f(x) = \frac{\sin x + \tan x}{\sqrt{9x^2+2x^3}}$

8. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin 3x}$
9. $f(x)=\dfrac{\cos x-\cos 2x+\sin 3x}{\sqrt{\cos x-\cos 2x}}$
10. $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$
11. $f(x)=\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x}$
12. $f(x)=1-\cos x\sqrt{\cos 2x}$

Exercice

Calculer

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}$
6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{\sin 3(2-x)}$
7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$
8. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin x-1}{6x-\pi}$
9. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\tan x\sin 2x$
10. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin 3x}{1-2\cos x}$
11. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

12 $\lim\limits_{x \to \frac{2\pi}{3}} \dfrac{\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\frac{x}{4}}{\tan 3x}$

13 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sqrt{3}\tan x - 1}{2\cos x - \sqrt{3}}$

14 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin(x-a)}{\sin x - \sin a}$

15 $\lim\limits_{x \to +\infty} x \sin\dfrac{\pi}{x}$

16 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin\theta}{x\sin\frac{\theta}{x}}$ $\left(\theta \text{ fixé}\right)$

17 $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta}{x\sin\frac{\theta}{x}}$ $\left(x \text{ fixé}\right)$

Exercice

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x - \sin x}{3x+1}$.
  - a Montrer que pour tout réel positif x on a : $\dfrac{2x-1}{3x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{2x+1}{3x+1}$.
  - b En déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.
- Soit g la fonction définie sur $[2, +\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{3x + \sin x}{x-1}$.
  - a Montrer que pour tout $x \geq 2$ on a : $|g(x) - 3| \leq \dfrac{4}{x-1}$.
  - b Déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{E(x) + \sin(x)}{x}$

1 Étudier la limite de f en 0.

2 Montrer que $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right)$; $\left|f(x) - 1\right| < \dfrac{2}{|x|}$ puis déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Exercice

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) + 1 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1. Montrer que pour tout $x < 0$ on a : $-x^2 + 1 \leq f(x) \leq x^2 + 1$.
2. En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.
3. Montrer que f admet une limite en 0.
4. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$

Exercice

Soit la fonction f définie sur par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{3x^2+1} + 3x & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{3x^2-x-2}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Déterminer le domaine de définition de f.
- a. Calculer $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$
  b. f admet-elle une limite en 1 ? Justifier.
- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
- Soit la fonction g définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = f(x) - 3x$.
  Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

Exercice

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1+\cos(\pi x)}{\pi(1+x)} & \text{si } x > -1 \\ f(x) = \sqrt{x^2+x} & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + x$.
2. Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a : $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{\pi(1+x)}$.
3. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f \circ f(x)$.
4. Calculer $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \dfrac{f(x)}{x+1}$.