

Limites des fonctions

Les orientations pédagogiques	Capacités attendues
* On approchera la notion de limite d'une manière intuitive à partir du "comportement" des fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^n$ et leur inverse au voisinage de 0 et de $+\infty$ et de $-\infty$ et on admettra ces limites ; * On se basera sur les propriétés de l'ordre dans $\mathbb{R}$ pour calculer les limites de fonctions simples * On habituera les élèves à lever les indéterminations ; * On se limitera, dans l'utilisation de la définition de la limite, à démontrer quelques propriétés signalées au programme et dans la résolution de quelques exercices pour se familiariser tout simplement avec la définition.	* Calculer les limites des fonctions polynômes, des fonctions rationnelles et des fonctions irrationnelles ; * Calculer les limites de fonctions trigonométriques simples en utilisant les limites usuelles ; * Résoudre des inéquations de type $f(x) - \ell < \varepsilon$ et de type $f(x) > A$ pour montrer que $f(x)$ tend vers ℓ dans des situations simples.



Limite lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$

1 Cas d'une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$

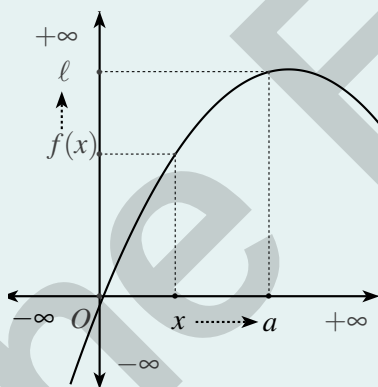
Définition

On dit que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers a , est $\ell \in \mathbb{R}$ si le nombre $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut du réel ℓ , pourvu que x soit assez proche du réel a . Précisément

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]a - \delta, a + \delta[$ on ait $f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

$$\text{Ou : } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$



2 Cas où la limite est $+\infty$ ou $-\infty$

Définition

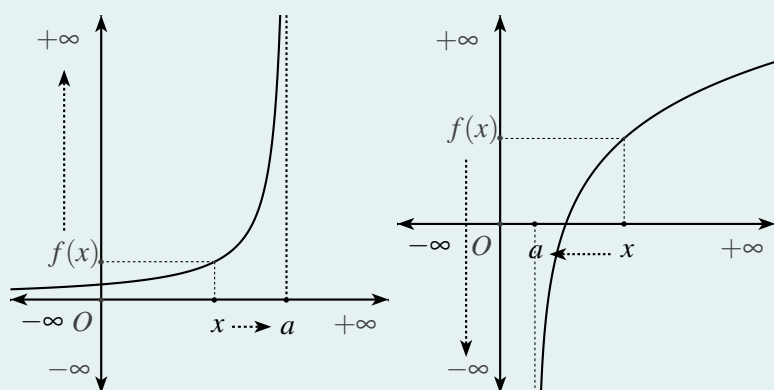
On dit que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers a , est $+\infty$ si le nombre $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit assez proche du réel a . Précisément :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$$

pour tout $A > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]a - \delta, a + \delta[$ on ait $f(x) \in]A, +\infty[$.

$$\text{Ou : } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \delta > 0, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > A.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \delta > 0, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -A.$$



Interprétation géométrique : Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$, on dit que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $x = a$ comme *asymptote verticale*.

3 Limites à droite et à gauche

Définition

Les *limites à droite* $\lim_{x \rightarrow a^+} = \lim_{x \rightarrow a, x > a}$ sont définies en remplaçant $]a - \delta, a + \delta[$ par $]a, a + \delta[$.

Les *limites à gauche* $\lim_{x \rightarrow a^-} = \lim_{x \rightarrow a, x < a}$ sont définies en remplaçant $]a - \delta, a + \delta[$ par $]a - \delta, a[$.

L'interprétation en terme d'asymptote est identique.



Limite lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

1 Cas d'une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$

Définition

On dit que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$ (plus l'infini), est $\ell \in \mathbb{R}$ si le nombre $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut du réel ℓ , pourvu que x soit assez grand. Précisément

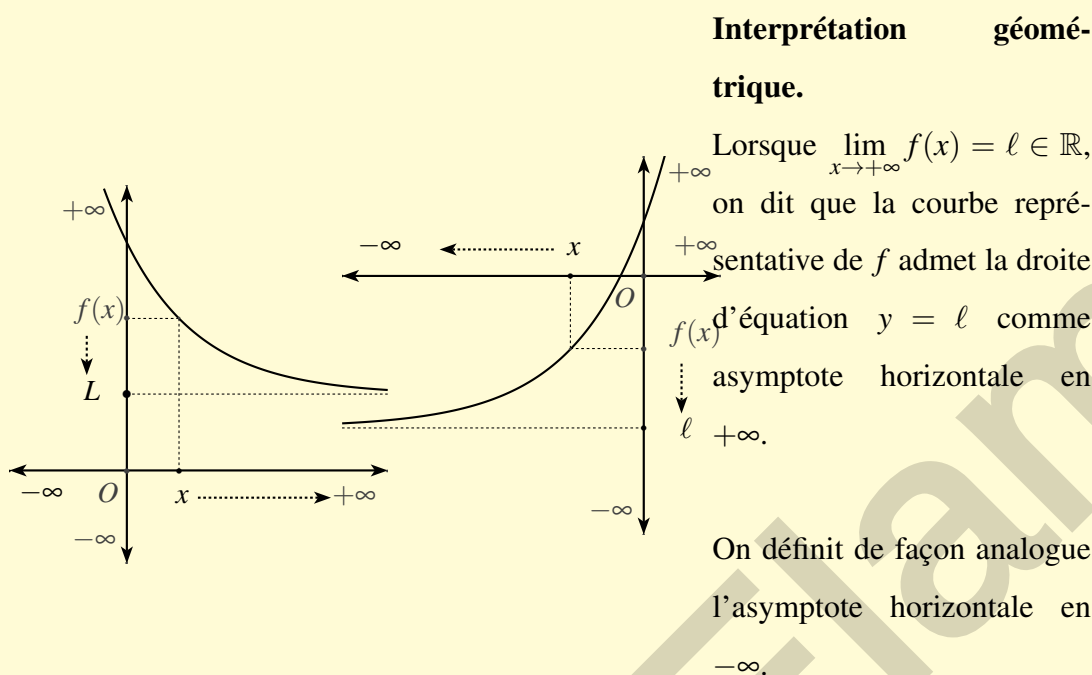
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in]B, +\infty[$ on ait $f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

Ou : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0 \mid x \in]B, +\infty[\Rightarrow f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$

Remarque

On définit de même $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ en remplaçant $]B, +\infty[$ par $] -\infty, -B[$.



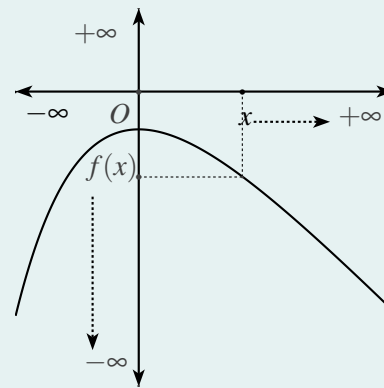
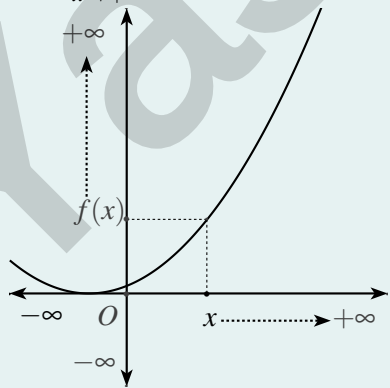
2 Cas d'une limite infinie

Définition

On dit que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$ (plus l'infini), est $+\infty$ si le nombre $f(x)$ peut être grand que l'on veut, pourvu que x soit assez grand. Précisément

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
pour tout $A > 0$, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in]B, +\infty[$ on ait $f(x) \in]A, +\infty[$.

Ou : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0 \mid x \in]B, +\infty[\Rightarrow f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.



• Exemple

Définir avec précision :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$



Opérations sur les limites

Les résultats qui suivent sont valables pour $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1 Limite d'une somme

$\lim_{x \rightarrow a} u(x)$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} v(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} u(x) + v(x)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

2 Limite d'un produit

$\lim_{x \rightarrow a} u(x)$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} v(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} u(x) \times v(x)$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

3 Limite d'un quotient

$\lim_{x \rightarrow a} v(x)$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$0^+ (0, v(x) > 0)$	$0^- (0, v(x) < 0)$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{v(x)}$	$\frac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Remarque

- ▶ Lorsque la forme indéterminée, $(\infty - \infty; \infty \times 0; \frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty})$ il faut changer l'écriture de la fonction pour lever l'indétermination.
- ▶ Pour traiter les limites de quotients $\frac{u}{v}$ on remarque $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$.
- ▶ Dans le cas de $\frac{1}{v(x)}$, si la limite de $v(x)$ est nulle, il faut étudier le signe de $v(x)$

pour conclure.

► On n'écrit jamais de calcul faisant intervenir $+\infty$, $-\infty$, 0^+ , 0^- , ...

• Exemple

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} =$$

• La limite $\lim_{x \rightarrow 2, x < 2} \frac{1}{2-x}$ dépend du signe de $2-x$ car $\lim_{x \rightarrow 2} 2-x = 0$.

Or

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2-x$		$+$	$0 \quad -$

donc si $x < 2$, on a $2-x > 0$, d'où $\lim_{x \rightarrow 2, x < 2} \frac{1}{2-x} = +\infty$.

4

Limite de fonctions composées

Soient $a, b, \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et $\lim_{X \rightarrow b} v(X) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow a} v(u(x)) = \ell$.

• Exemple

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) =$$

IV

Traiter les formes indéterminées

Avant d'utiliser l'une des techniques suivantes, s'assurer d'avoir **simplifié** l'expression.

• Exemple

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \dots\dots\dots$$

1

Formes indéterminées avec des polynômes

D'une manière générale, factoriser dans l'expression, ou au numérateur et au dénominateur, le terme qui semble devoir dominer :

• Exemple

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^6 - x^4 + x^3 + 1 = \dots\dots\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 10\sqrt{x} - x + 2 = \dots\dots\dots$$



La limite d'un polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est la même que la limite de son terme de plus haut degré. De même, la limite du quotient de deux polynômes en $+\infty$ ou $-\infty$ est la même que celle du quotient de leurs termes de plus haut degré.

EXEMPLES

Dans le cas d'un polynôme en $+\infty$: soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polynôme avec $a_n \neq 0$. Alors pour tout $x \neq 0$, on a :

$P(x) = a_n x^n \times \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{x^n}\right)$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ donc la limite du facteur entre parenthèses est 1.

Par produit on a bien : $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n$.

• Exemple

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3 + 3x^4 - 5x + 4 = \dots\dots\dots$$

• Exemple

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \text{ par théorème.}$$

• Exemple

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1}{x^2+x+1} \dots\dots\dots$$

La propriété du plus haut degré ne s'applique que pour les limites en $+\infty$ ou $-\infty$.

L'utilisation de la propriété pour les quotients de deux polynômes se fait en trois temps :

1. Application de la propriété 2. Simplification 3. Conclusion.



La limite d'un polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est la même que la limite de son terme de plus haut degré. De même, la limite du quotient de deux polynômes en $+\infty$ ou $-\infty$ est la même que



celle du quotient de leurs termes de plus haut degré.

EXEMPLES

Dans le cas d'un polynôme en $+\infty$: soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polynôme avec $a_n \neq 0$. Alors pour tout $x \neq 0$, on a :

$P(x) = a_n x^n \times \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{x^n}\right)$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ donc la limite du facteur entre parenthèses est 1.

Par produit on a bien : $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n$.

• Exemple

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3 + 3x^4 - 5x + 4 = \dots$$

• Exemple

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \text{ par théorème.}$$

• Exemple

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1}{x^2+x+1} = \dots$$

La propriété du plus haut degré ne s'applique que pour les limites en $+\infty$ ou $-\infty$.

L'utilisation de la propriété pour les quotients de deux polynômes se fait en trois temps :

1. Application de la propriété 2. Simplification 3. Conclusion.

2 Forme indéterminée $\frac{0}{0}$ et changement de variable

Pour les limites en $a \in \mathbb{R}$ (ou a^+ , a^-) qui présentent une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$, il peut être opportun de faire un changement de variable en posant $x = a + h$.

• Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{1 - x} = \dots$$

3 Forme indéterminée et radicaux : quantité conjuguée

Pour les limites faisant intervenir des radicaux, on peut essayer de multiplier au numérateur et au dénominateur par *la quantité conjuguée* avec comme idée d'utiliser l'identité remarquable :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) :$$

• Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \dots\dots\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = \dots\dots\dots$$



Théorèmes d'encadrement

1 Théorème de majoration et de minoration

Soient u et f deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$.

- ▶ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ et pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f(x) \geq u(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- ▶ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -\infty$ et pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f(x) \leq u(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

EXEMPLES

On prouve le premier point (la démo du second est analogue).

Par définition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ signifie que pour tout $A > 0$, il existe $B > a$ tel que pour tout $x \in [B, +\infty[$, on ait $u(x) \in [A, +\infty[$.

Or pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f(x) \geq u(x)$ donc en particulier, pour tout $x > B$, on a l'inégalité $f(x) \geq u(x) \geq A$, donc $f(x) \geq A$. On a prouvé :

Pour tout $A > 0$, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in [B, +\infty[$, on ait $f(x) \in [A, +\infty[$, c'est-à-dire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

• Exemple

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\cos(x) - 2) = \dots\dots\dots$$