Cours 2BSHL

Chapitre

Les Fonctions Exponentielles

Les orientations pédagogiques	Capacités attendues
– On admettra à ce niveau que : $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ ces deux limites seront considérées comme des limites fondamentales ; – On montrera la relation : $\ln(a) = b \quad \forall a > 0 \Leftrightarrow \quad e^b = a$ et on lutilisera dans la résolution des équations, des inéquations et des systèmes.	– Résoudre des équations, des inéquations et des systèmes en exponentielle népérienne dont la résolution ne pose pas de difficulté ; – Utilisation de la calculatrice pour déterminer des valeurs approchées du nombre ea où a est un nombre réel ou pour déterminer la valeur du nombre a tel que e^a est un nombre connu ; – Etude et représentation de fonctions simples dont lexpression comporte la fonction exponentielle népérienne.

Les prés-requis
– La fonction ln – Dérivabilité – L'étude des fonctions

I Fonction exponentielle népérienne, le symbole exp, le nombre e et lécriture e^x

D — Définition

La fonction réciproque de la fonction ln est appelée fonction exponentielle népérienne et on la note par exp.

Remarque

Soit r un nombre réel. On a $\ln(\exp(r)) = r$ et on sait que $\ln(e^r) = r\ln(e) = r$ donc on peut déduire que $\ln(\exp(r)) = \ln(e^r)$ d'où pour tout r de $\mathbb{R}$ on $\exp(r) = e^r$. On prolonge cette notation sur $\mathbb{R}$ et on écrit : $(\forall x \in \mathbb{R}); \exp(x) = e^x$.

Propriété

La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\left(\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2\right); e^a = e^b \Leftrightarrow a = b \quad \text{et} \quad \left(\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2\right); e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}); e^x > 0$$

$$(\forall x \in]0, +\infty[)(\forall y \in \mathbb{R}); e^y = x \Leftrightarrow y = \ln(x)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}); \ln(e^x) = x \text{ et } (\forall x \in]0, +\infty[); e^{\ln(x)} = x$$

II Expressions : e^{a+b}, e^{a-b}, e^{-a}, $\left(e^b\right)^n$

Propriété

$$\left(\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2\right); e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

Pour tout x et y de $\mathbb{R}$ et r de $\mathbb{N}$ on a :

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$(e^x)^r = e^{rx}$$

Exercice

:

1 Simplifier les expressions :

$$C = e^{2x}\left(\left(e^x+e^{-x}\right)^2+\left(e^x-e^{-x}\right)^2\right) \quad B = \left(e^{2-x}\right)^2\times e^{3x-4} \quad A = \frac{e^{2x}\times e^{3x}}{\left(e^x\right)^4}$$

III Étude et représentation de la fonction exp

1 Limites usuelles

Propriété

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 (n\in\mathbb{N})$

Exercice

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} x^2 - e^x$
2. $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x+4}{x}}$
3. $\lim_{x\to-\infty} e^{x^3+3x}$
4. $\lim_{x\to+\infty} (x-1)e^{-x}$
5. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}e^{-x}$

2 Dérivée de la fonction $x\mapsto e^x$

Propriété

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x)=e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Exercice

1 Calculer la dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants : 1) $f(x)=2x+e^x$ 2) $f(x)=e^{-x}$ 3) $f(x)=(x+1)^2\mathrm{e}^{-2x}$

2 Montrer que $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

Propriété

On a : $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

Exemple

Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = 1$

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I est on a : $(\forall x \in I); f'(x) = u'(x) \cdot \mathrm{e}^{u(x)}$