Chapitre

Équations différentielles

Historique

Cest au XVIIe siècle avec la dérivation et lintégration de Newton et Leibniz quapparait la notion déquations différentielles. Elles sont issues de problèmes de géométrie et de mécanique. Il faut attendre le XVIIIe siècle pour voir les premières méthodes classiques de résolution.

Avec le développement des sciences, la résolution des équations différentielles devient une branche importante des mathématiques et interviennent dans de nombreux domaines dont la SVT, lastronomie, léconomie et la physique.

Encouragé par Huygens à étudier les mathématiques, Leibniz sera l'inventeur en 1686, en même temps que Newton, du calcul différentiel et intégral (Nova methodus pro maximis et minimis, 1684-86).
A cette époque, les équations différentielles s'introduisent en mathématique par le biais de problèmes d'origine mécanique ou géométrique, comme par exemple :Mouvement du pendule circulaire, Problème du mouvement de deux corps s'attirant mutuellement suivant la loi de la gravitation Newtonnienne ......
Vers 1700, beaucoup de ces problèmes étaient déjà partiellement ou totalement résolus et quelques méthodes de résolution mises au point. Ensuite, les mathématiciens se sont progressivement intéressés à des classes de plus en plus larges d'équations différentielles. Assez curieusement, les équations différentielles linéaires à coefficients constants sans second membre, qui apparaissent maintenant comme les plus simples, ne furent résolues qu'en 1739 par Euler. Il ne faut pas oublier que, pour les mathématiciens de cette époque, le maniement de la fonction exponentielle n'était pas encore familier.
Vers 1870 Fuchs, puis Poincaré, vont inaugurer un nouveau champ de recherche. Le calcul effectif des solutions est la plupart du temps impossible, mais on peut chercher à déduire de l'examen a priori de l'équation, les propriétés des solutions.
Dès le début du XXième siècle, les équations différentielles ont trouvé de nombreuses applications dans les Sciences de la Vie, lorsquest apparue la nécessité de relier le sujet biologique réel et la représentation quon en donne à travers un objet mathématique, que lon appelle un modèle mathématique.

I Introduction aux équations différentielles

Activité

On considère les deux équations :(E_1) : $x^2-2x+1=0$ et (E_2) : $y'-2y+1=0$ où x est un nombre réel et y est une fonction numérique définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

1. Quelle est la différence essentielle entre les deux équations .
2. Vérifier que 1 est une solution de l'équation (E_1)
3. Vérifier que la fonction y tel que $y(x)=e^{2x}-\dfrac{1}{2}$ est une solution de l'équation (E_2)

D **Définition**

Une équation différentielle est une équation dont linconnue est une fonction y dérivable sur un intervalle I . Cette équation doit contenir au moins une dérivée de la fonction y.
- Résoudre une équation différentielle (E) signifie : déterminer toutes les fonctions dérivables sur I qui vérifient léquation (E)

Exemple

On considère l'équation $(E) : y' - 3y = 0$

- L'équation (E) est une équation différentielle dont linconnue est la fonction y
- L'écriture différentielle de l'équation (E) est : $\dfrac{dy}{dx} - 3y(x) = 0$
- La fonction y tel que $y(x) = e^{3x}$ est une solution de l' équation différentielle (E) .
  En effet : $y(x) = e^{3x} \Rightarrow y'(x) = 3e^{3x} \Rightarrow y'(x) - 3y(x) = 3e^{3x} - 3e^{3x} = 0$

Application

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + 4y = 0$

1. Donner l'écriture différentielle de l'équation (E)
2. Vérifier que toutes les fonctions suivantes sont des solutions de l'équation (E).
   $f_1(x) = \cos(2x)$, $f_2(x) = \sin(2x)$,$f_3(x) = 3\cos(2x)$,$f_4(x) = -5\sin(2x)$
   et $f_5(x) = 4\cos(2x) - 3\sin(2x)$

II Équations différentielles de premier degré

D **Définition**

Soit a et b deux nombres réels $(a \neq 0)$

- Léquation $(E) : y' = ay + b$ dont linconnue est une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée y' est appelée équation différentielle de premier ordre.
- En écriture différentielle, léquation (E) sécrit : $\dfrac{dy}{dx} = ay(x) + b$
- Toute fonction f dérivable su $\mathbb{R}$ et vérifiant $f'(x) = af(x) + b$ pour tout x de $\mathbb{R}$ est appelée solution de léquation différentielle (E)

1 Équations différentielles de type $y' = ay$

Activité

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ke^{ax}; k \in \mathbb{R}$
   a. Vérifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
   b. Vérifier que $f' = af$.

On dit que f tel que $f(x) = ke^{ax}; k \in \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle $y' = ay$

2 Soit f une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que $f' = af$.
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^{ax}}$

a Montre que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $g'(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$

b Déduire que $f(x) = \lambda e^{ax}; \lambda \in \mathbb{R}$.

Toute fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que $f' = af$ elle s'écrit sous la forme $f(x) = ke^{ax}(k \in \mathbb{R}) \forall x \in \mathbb{R}$

Propriété

Soit a un nombre réel.
Les solutions de léquation différentielle $y' = ay (\Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = af(x))$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :$y(x) = ke^{ax}$ où $k \in \mathbb{R}$

Démonstration : On considère une fonction f quelconque définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que f est solution de (E) On pose la fonction g définie et dérivable par produit sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)e^{ax}$. Alors :

$$g'(x) = f'(x)e^{ax} + af(x)e^{ax} = (f'(x) + af(x))e^{ax}$$

La fonction g est solution de (E) entraine

$$(f'(x) + af(x))e^{ax} = af(x)e^{ax} \Rightarrow f'(x) = 0$$

D'où $f(x)$ est constante pour tout x. Enfin $\boxed{\exists\, \lambda \in \mathbb{R} \;/\; y = \lambda e^{ax}}$

Exemple

1 Résoudre léquation différentielle $(E) : y' = 3y$ et $y(0) = 1$.

Remarque :$y(0) = 1$ est appelée condition initiale de léquation (E)

Solution
Les solutions de léquation différentielle (E) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y = ke^{3x}$ où $k \in \mathbb{R}$.
On a :$y(0 = 1) \Leftrightarrow ke^0 = 1 \Leftrightarrow k = 1$ donc $y(x) = e^{3x}$
D'où $\boxed{y(x) = e^{3x} \forall x \in \mathbb{R}}$

2 (Dipôle RC:Décharge du condensateur).
Léquation différentielle de décharge du condensateur est :$u_c(t) + RC\dfrac{du_c}{dt} = 0; u_c(0) = E$

Résolution de léquation différentielle
On a :$u_c(t) + RC\dfrac{du_c}{dt} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{du_c}{dt} = -\dfrac{1}{RC}u_c(t)$
Donc $u_c(t) = Ae^{\frac{-1}{RC}t}$ où $A \in \mathbb{R}$.
On a :$u_c(0) = E \Leftrightarrow Ae^0 = E \Leftrightarrow A = R$ donc $u_c(t) = Ee^{\frac{-1}{RC}t}$
D'ou $\boxed{u_c(t) = Ee^{\frac{-t}{\tau}} \forall t \in \mathbb{R}}$ avec $\tau = RC$:Constante du temps

Application

1. Résoudre léquation différentielle $(E) : 2y' + 3y = 0$
2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f(2) = -1$

2 Équations différentielles de type $y' = ay + b$

Activité

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2, (a \neq 0)$ et f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}; k \in \mathbb{R}$
   a. Vérifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x) =$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
   b. Vérifier que $f'(x) = af(x) + b$.

On dit que f tel que $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}; k \in \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$

2. Soit f une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que $f' = af + b$.
   On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) + \frac{b}{a}$
   a. Montre que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $g'(x) = ag(x) \forall x \in \mathbb{R}$
   b. Déduire que $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}; k \in \mathbb{R}$.

Toute fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que $f' = af + b$ elle s'écrit sous la forme $f(x) = ke^{ax} (k \in \mathbb{R}) \forall x \in \mathbb{R}$

Propriété

Soit a et b deux nombres réels tels que $a \neq 0$.
Les solutions de léquation différentielle $y' = ay + b (\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = af(x) + b)$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :$y(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où $k \in \mathbb{R}$

Exemple

1. Résoudre léquation différentielle $(E) : \frac{1}{2}y' + 3y - 1 = 0; y(0) = 0$.
   Solution :
   On a :$\frac{1}{2}y' + 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}y' = -3y + 1 \Leftrightarrow y' = -6y + 2$.
   Les solutions de léquation différentielle (E) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :
   $y = ke^{-6x} + \frac{1}{3}$ où $k \in \mathbb{R}$.
   On a :$y(0 = 0) \Leftrightarrow ke^0 + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3}$ donc $y(x) = -\frac{1}{3}e^{-6x} + \frac{1}{3}$
   D'où $\boxed{y(x) = \frac{1}{3}(1 - e^{-6x}) \forall x \in \mathbb{R}}$
2. (Dipôle RC:Charge du condensateur).
   Léquation différentielle de charge du condensateur est :$u_c(t) + RC\frac{du_c}{dt} = E; u_c(0) = 0$

Résolution de léquation différentielle :

On a :$u_c(t)+RC\dfrac{du_c}{dt}=E \Leftrightarrow \dfrac{du_c}{dt}=-\dfrac{1}{RC}u_c(t)+\dfrac{E}{RC}$

Donc $u_c(t)=Ae^{\frac{-1}{RC}t}+E$ où $A\in\mathbb{R}$.

On a :$u_c(0)=0 \Leftrightarrow Ae^0+E=0 \Leftrightarrow A=-E$ donc $u_c(t)=Ee^{\frac{-1}{RC}t}-E$

D'où $\boxed{u_c(t)=E(1-e^{\frac{-t}{\tau}})\forall t\in\mathbb{R}}$ avec $\tau=RC$

Application

1. Résoudre léquation différentielle $(E): 2y'+y=1$
2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f(-1)=-1$

III Équations différentielles de deuxième degré

1 Équations différentielles de type $ay''+by'+cy=0$

Activité

L'équation $ay''+by'+cy=0$ est appelée équation différentielle dordre 2 ,son équation caractéristique est : $az^2+bz+c=0$.

1. On considère l'équation différentielle $(E_1): y''+3y'-4y=0$
   a. Déterminer r_1 et r_2,les deux solutions de l'équation caractéristique de l'équation différentielle (E_1)
   b. Montrer que toute fonction qui s'écrit sous la forme $y: x\longmapsto \alpha e^{r_1x}+\beta e^{r_2x}; (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ est une solution de l'équation différentielle (E_1)
2. On considère l'équation différentielle $(E_2): y''+2y'+y=0$
   a. Déterminer r_0 ,la seule solution de l'équation caractéristique de l'équation différentielle (E_2)
   b. Montrer que toute fonction qui s'écrit sous la forme $y: x\longmapsto (\alpha x+\beta)e^{r_0x}; (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ est une solution de l'équation différentielle (E_2)
3. On considère l'équation différentielle $(E_3): y''+y'+y=0$
   a. Déterminer z_1 et z_2,les deux solutions complexes de l'équation caractéristique de l'équation différentielle (E_2)
   b. On pose $p=Re(z_1)$ et $q=Im(z_1)$.
   Montrer que toute fonction qui s'écrit sous la forme :
   $y: x\longmapsto e^{px}(\alpha\cos(qx)+\beta\sin(qx)); (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$est une solution de l'équation différentielle (E_3)

D **Définition**

Soit a,b et c des nombres réels tels que $a \neq 0$.

- Léquation $(E) : ay'' + by' + cy = 0$ dont linconnue est une fonction y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée y' et de dérivée seconde y'' est appelée équation différentielle dordre 2.
  (On dit aussi : Équation différentielle linéaire dordre 2 à coefficients réels et sans second membre).
- En écriture différentielle, léquation (E) sécrit :$a\dfrac{d^2y}{dx^2} + b\dfrac{dy}{dx} + cy(x) = 0$
- Toute fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est appelée solution de léquation différentielle (E)

D **Définition**

Léquation $(EC) : az^2 + bz + c = 0$, $z \in \mathbb{C}$ est appelée léquation caractéristique de léquation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$

Propriété

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$**,** le discriminant de léquation caractéristique (EC)

- Si $\Delta > 0$;L'équation (EC) admet deux solutions réelles r_1 et r_2 ,alors les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$
  ou $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$,$r_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$;L'équation (EC) admet une seule solution réelle r_0 ,alors les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :$y(x) = (\alpha x + \beta)e^{r_0 x}$
  ou $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $r_0 = \dfrac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$;L'équation (EC) admet deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \lambda + i\omega$ et $z_2 = \lambda - i\omega$ ($\lambda = Re(z_1)$ et $\omega = Im(z_1)$) ,alors les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :$y(x) = A\cos(\omega x + \varphi)e^{\lambda x}$ ou $(A,\varphi) \in \mathbb{R}^2$
  $\Leftrightarrow y(x) = (\alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x))e^{\lambda x}$ ou $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

Exemple

1 Résoudre léquation différentielle : $(E_1) : y'' - 3y' - 4y = 0$;$y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
Léquation caractéristique de léquation (E_1) est :
$(EC_1) : z^2 - 3z - 4 = 0, z \in \mathbb{C}$,or $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25$.
Léquation (EC_1) admet deux solutions réelles $r_1 = \dfrac{3-5}{2} = -1$ et $r_2 = \dfrac{3+5}{2} = 4$.
Donc les solutions de léquation différentiel (E_1) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = \alpha e^{-x} + \beta e^{4x}$; $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R})^2$.
On a : $y'(x) = -\alpha e^{-x} + 4\beta e^{4x} \forall x \in \mathbb{R}^2$

Donc $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=1 \\ -\alpha+4\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{4}{5} \\ \beta=\frac{1}{5} \end{cases}$

D'où : $\forall x\in\mathbb{R} : y(x)=\frac{4}{5}e^{-x}+\frac{1}{5}e^{4x}$

2 Résoudre léquation différentielle :$(E_2) : 9y" - 6y' + y = 0 ; y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
Léquation caractéristique de léquation (E_2) est :
$(EC_2) : 9z^2 - 6z + 1 = 0, z \in \mathbb{C}$,or $\Delta = (-6)^2 - 4\times 9\times 1 = 0$.
Léquation (EC_2) admet une seule solution réelle $r_0 = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.
Donc les solutions de léquation différentiel (E_2) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :
$y(x) = (\alpha x+\beta)e^{\frac{1}{3}x} ; (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.
On a : $y'(x) = \alpha e^{\frac{1}{3}x} + \frac{1}{3}(\alpha x+\beta)e^{\frac{1}{3}x} = \frac{1}{3}(\alpha x+\beta+3\alpha)e^{\frac{1}{3}x} \forall x\in\mathbb{R}^2$.
Donc $\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=0 \\ \alpha=1 \end{cases}$

D'où : $\forall x\in\mathbb{R} : y(x)=xe^{\frac{1}{3}x}$

3 Résoudre léquation différentielle : $(E_3) : y" + 10y' + 29y = 0 ; y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$.
Léquation caractéristique de léquation (E_3) est :
$(EC_3) : z^2 + 10z + 29 = 0 z \in \mathbb{C}$ or $\Delta = 10^2 - 4\times 1\times 29 = -16$.
Léquation (EC_3) admet deux solutions complexes conjuguées
$z_1 = \frac{-10+i\sqrt{16}}{2} = \frac{-10+4i}{2} = -5+2i$ et $z_2 = -5-2i$.
Donc les solutions de léquation différentiel (E_3) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :
$y(x) = A\cos(2x+\varphi)e^{-5x} ; (A,\varphi)\in\mathbb{R}^2$.
On a : $y'(x) = -2A\sin(2x+\varphi)e^{-5x} - 5\cos(2x+\varphi)e^{-5x} \forall x\in\mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow (-2A\sin(2x+\varphi) - 5\cos(2x+\varphi))e^{-5x} \forall x\in\mathbb{R}^2$.
Donc $\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\cos(\varphi)=0 \\ -2A\sin(\varphi)-5\cos(\varphi)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi=\frac{\pi}{2} \\ A=1 \end{cases}$

D'ou : $\forall x\in\mathbb{R} : y(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{2})e^{-5x} = -\sin(2x)e^{-5x}$

Application

1 a Résoudre léquation différentielle $(E_1) : y" - 5y' + 6y = 0$
b Déterminer la solution y_1 de (E) qui vérifie $y_1(0) = 0$ et $y_1'(0) = 1$
2 Résoudre léquation différentielle $(E_2) : y" + 4y' + 4y = 0$
3 a Résoudre léquation différentielle $(E_3) : y" + 2y' + 5y = 0$
b Déterminer la solution y_3 de (E) qui vérifie $y_3(0) = 0$ et $y_3'(0) = 1$

2 Cas particuliers

Équation différentielle	Solutions
$y'' - \omega y = 0, \omega > 0$	$y(x) = \alpha e^{\sqrt{\omega}x} + \beta e^{-\sqrt{\omega}x}; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
$y'' + \omega y = 0, \omega > 0$	$y(x) = A\cos(\sqrt{\omega}x + \varphi); (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2$
$y'' + \omega y' = 0, \omega \in \mathbb{R}$	$y(x) = \alpha + \beta e^{-\omega x}; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

Exemple

1. Les solutions de léquation différentielle $(E_1) : y'' - 4y = 0$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \alpha e^{\sqrt{4}x} + \beta e^{-\sqrt{4}x}; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \boxed{y(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x}; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2}$
2. Les solutions de léquation différentielle $(E_2) : y'' + 64y = 0$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $A\cos(\sqrt{64}x + \varphi); (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \boxed{y(x) = A\cos(8x + \varphi); (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2}$
3. Les solutions de léquation différentielle $(E_3) : y'' - 7y' = 0$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \alpha + \beta e^{7x}; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ donc $\boxed{y(x) = \alpha + \beta e^{7x}; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2}$

Application

1. a. Résoudre léquation différentielle $(E_1) : y'' - 6y = 0$
   b. Déterminer la solution y_1 de (E) qui vérifie $y_1(0) = 0$ et $y_1'(0) = 1$
2. a. Résoudre léquation différentielle $(E_2) : y'' + 4y = 0$
   b. Déterminer la solution y_1 de (E) qui vérifie $y_1(0) = 0$ et $y_1'(0) = 1$
3. a. Résoudre léquation différentielle $(E_3) : y'' + 2y' + 5y = 0$
   b. Déterminer la solution y_3 de (E) qui vérifie $y_3(0) = 0$ et $y_3'(0) = 1$