Chapitre

Cours 1AC

Équation - inéquation - Système

Les orientations pédagogiques

* Les techniques de résolution des équations et inéquations du premier degré à une inconnue ont été étudiées au collège, il faudra renforcer cette pratique par l'étude de quelques exemples simples faisant intervenir la valeur absolue et les équations paramétriques simples, dans le but de développer la capacité des élèves à utiliser le raisonnement par disjonction des cas ;
* Il faudra habituer les élèves à résoudre des équations du second degré sans recours au discriminant (racines évidentes, techniques de factorisation, ...) ;
* Les équations paramétriques du second degré sans hors programmes ;
* Des problèmes, issues de la vie quotidienne ou des autres matières, devront être proposés dans le but d'habituer les élèves à mathématiser des situations et de les résoudre ;
* Les élèves ayant déjà utilisé la méthode de substitution et la méthode des combinaisons linéaires, pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues, il faudra renforcer celles-ci, par la méthode du déterminant à l'aide des exercices ;
* Il faudra lier la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues à l'étude de la position relative de deux droites ;
* On exploitera la représentation graphique des solutions d'une inéquation du premier degré à deux inconnues dans la résolution de quelques problèmes simples de programmation linéaire.

Capacités attendues

* Résoudre des équations et des inéquations se ramenant à la résolution d'équations et d'inéquations du premier ou second degré à une inconnue ;
* Résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues en utilisant différentes méthodes (combinaisons linéaires, substitution et déterminant) ;
* Mathématiser, en utilisant des expressions, des équations, des inéquations, des inégalités ou des systèmes, une situation faisant intervenir des quantités variables ;
* Représenter graphiquement les solutions d'inéquations ou de système d'inéquations du premier degré à deux inconnues, et utiliser cette représentation dans le régionnement du plan et dans la résolution de problèmes simples de programmation linéaire.

I Équation et inéquation du premier degré

1 Équation du premier degré à une inconnue

Activité

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $2x-1=2(x-0,5))+3\left(x-\frac{2}{3}\right)$.

b) $\frac{2x-1}{3}+\frac{3x-2}{2}=4-\frac{5x}{12}$.

c) $|x-1|=5$.

d) $\left(2x-\sqrt{3}\right)\left(2x-\frac{3}{7}\right)+\left(\sqrt{3}-2x\right)\left(x-\frac{18}{5}\right)$.

e) $\sqrt{x^2+7}=4$.

f) $\frac{2x-7}{4-x}=\frac{3}{5}$.

Définition

On appelle **équation du premier degré à une inconnue** toute égalité de la forme $ax+b=0$ où x est l'inconnue et a et b sont deux nombres réels donnés.

Remarque

La résolution d'une équation à une inconnue dans $\mathbb{R}$, revient à déterminer les valeurs (si elles existent) de l'inconnue pour lesquelles cette équation (en tant qu'une égalité) est réalisée. Ces valeurs est appelées **solutions** de cette équation. L'ensemble formé par ces valeurs est appelé **ensemble des solutions** de cette équation et se note souvent par la lettre S.

Exemples et applicaation

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2x-3=0$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
  $(1):\ 2x-3-3(1-x)=9x-7$. ; $(2):\ \frac{x-1}{2}-\frac{2x+5}{3}=4-\frac{x}{6}$.

Propriété

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E):\ ax+b=0$ où x est l'inconnue et $a,b\in\mathbb{R}$.

Soit S l'ensemble des solutions de l'équation (E).

$*$ Si $a \neq 0$, alors $S = \{-\frac{b}{a}\}$.	$*$ Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $S = \emptyset$	$*$ Si $a = 0$ et $b = 0$, alors $S = \mathbb{R}$

EXEMPLES ET APPLICAATION

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $(E_1) : (2x-3)\left(\frac{3}{2}x+5\right) = 0.$

b) $(E_2) : \dfrac{x-1}{3} - \dfrac{2x+1}{2} = \dfrac{3-4x}{6}.$

c) $(E_3) : \sqrt{6} + 1 - x\sqrt{3} = 1 - \sqrt{3}\left(x-\sqrt{2}\right).$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $(3x-4)(5x+1) - 2(3x-4)(1-x) = 0.$

b) $\dfrac{4x-1}{3} - \dfrac{3x-1}{2} = 1 - \dfrac{x}{6}.$

c) $x - 1 - 2\left(3x - \sqrt{5}\right) = 2\left(\sqrt{2} - x\right).$

Remarque

Pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$, on utilise les développements, les simplifications, les factorisations et les règles suivantes:$(a, b, c \in \mathbb{R})$

- $a = b$ si et seulement si $a + c = b + c$.
- Si $c \neq 0$, alors : $a = b$ si et seulement si $ac = bc$.
- $ab = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$.

2 Équation du premier degré à une inconnue

Activité

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations et les systèmes suivants :

a) $-2x + 1 \geq x - 3.$

b) $\sqrt{2}x - \dfrac{3}{4} < \dfrac{2x-3}{3} + 4\left(x - \sqrt{2}\right).$

c) $\begin{cases} 2x - 3 & \leq 1 - 3x \\ 5x + 3 & > x + 9 \end{cases}.$

d) $|x - 2| \leq \frac{1}{2}.$

e) $|2x - 1| > 3.$

f) $\sqrt{x+5} > 3.$

Définition

Soit a et b deux nombres réels donnés .

On appelle **inéquation du premier degré à une inconnue** toute inégalité de la forme $ax+b \geq 0$, $ax+b > 0$, $ax+b \leq 0$ ou $ax+b > 0$ où x est l'inconnue.

Remarque

La résolution d'une inéquation à une inconnue dans $\mathbb{R}$, revient à déterminer les valeur (si elles existent) de l'inconnue pour lesquelles cette équation (en tant qu'une inégalité) est réalisée. Ces valeurs sont appelées **solutions** de cette inéquation. L'ensemble formé par ces valeurs est appelé **ensemble des solutions** de cette inéquation et se note souvent par la lettre S.

Exercice

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(I) : 2x-3 \geq 0$.
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux inéquations suivantes :
$(I_1) : 2(x-1)-(3x-5) \leq 6x+7+4(x-3)$. ; $(I_2) : \dfrac{3x}{4} - \dfrac{2x-1}{3} > \dfrac{5x-2}{12} - 1$.

Propriété

Soit a et b deux nombres réels donnés . On considère dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $ax+b \leq 0$. Soit S l'ensemble des solutions de cette inéquation.

* Si $a > 0$, alors $ax+b \leq 0 ssi x \leq -\frac{b}{a}$; donc $S = \left]-\infty; -\frac{b}{a}\right]$.
* Si $a < 0$, alors $ax+b \leq 0 ssi x \geq -\frac{b}{a}$; donc $S = \left[-\frac{b}{a}; -\infty\right[$.
* Si $a = 0$ et $b > 0$, alors $S = \emptyset$.
* Si $a = 0$ et $b < 0$, alors $S = \mathbb{R}$.

Remarque

- La dernière propriété est valable pour les inéquations $ax+b \geq 0$, $ax+b > 0$ et $ax+b > 0$, tout en prenant compte du sens du signe de l'inégalité.
- Pour résoudre une inéquation à une inconnue dans $\mathbb{R}$, on utilise les développe-

ments, les simplifications, les factorisations et les règles suivantes:$(a,b,c \in \mathbb{R})$

* $a \leq b$ si et seulement si $a+c \leq b+c$.
* Si $c > 0$, alors : $a \leq b$ si et seulement si $ac \leq bc$.
* Si $c < 0$, alors : $a \leq b$ si et seulement si $ac \geq bc$.

EXEMPLES ET APPLICAATION

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$(1) : -2x+1 < x-3. \quad ; \quad (2) : 5(3x-1)-(5x-4) \leq -4x+10-7(-2x+3).$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux inéquations suivantes :

$(I) : \dfrac{2x-1}{4}+8 < \dfrac{3-x}{5}. \quad ; \quad (J) : \dfrac{x+7}{10}-\dfrac{x-5}{5} \geq \dfrac{1-x}{10}.$

3 Signe du binôme $ax+b$

Activité

Soit a et b deux nombres réels donnés tels que $a \neq 0$.

1. Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$ $\quad ax+b = a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux inéquations : $(1) : x+\dfrac{b}{a} > 0 \quad ; \quad (2) : x+\dfrac{b}{a} < 0$.
3. Déterminer le signe du binôme $x+\dfrac{b}{a}$ et en déduire le signe du binôme $ax+b$.
4. Étudier le signe des deux binômes : $2x-3$ et $5-3x$. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $(2x-3)(5-3x) \geq 0$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux inéquations suivantes :

   $(I)\ (2x+5)(x-4) \geq 0. \quad ; \quad (J)\ (x+5)(3-x) < 0.$

Propriété

Soit a et b deux nombres réels donnés tels que $a \neq 0$.

- Pour tout $x \geq -\dfrac{b}{a}$ le binôme $ax+b$ et le réel a ont le même signe.
- Pour tout $x \leq -\dfrac{b}{a}$ le binôme $ax+b$ et le réel a ont un signe opposé.

Remarque

On résume la propriété précédente se résume dans un tableau qu'on appelle **tableau de signe** du binôme $ax+b$ comme suit :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	signe de $-a$	0	signe de a

Exemples et applicaation

- Donner le tableau de signe des deux binômes suivants : $2x+5$ et $-3x+7$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(I)\ (2x-3)(-5x+3) \leq 0$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux inéquations suivantes : $(4x-5)(2x+7)(1-x)^2 < 0.$; $4x^2-25 \geq 0.$

II Équation et inéquation du premier degré à deux inconnues - Système

1 Équation du premier degré à deux inconnues

Activité

Soit x et y deux nombres réels qui vérifient l'égalité : $(E)\ 2x-y=7$.

1. a. Montrer que le couple $(2;-3)$ est une solution de l'équation (E).
   b. le couple $(3;1)$ est-il une solution de l'équation (E).
   c. Soit $(a;b)$ une solution de l'équation (E) telle que $b=1$. Déterminer la valeur de a.
2. Soit $(a;b)$ une solution de l'équation (E).
   a. On pose $x=\alpha$; Montrer que $y=2\alpha-7$. En déduire les solutions de l'équation (E) en fonction de α.
   b. On pose $y=\beta$; Montrer que $x=\frac{\beta}{2}$. En déduire les solutions de l'équation (E) en fonction de β.
3. Résoudre l'équation $4x-5y+3=0$.

Définition

Soit a, b et c trois nombres réels.

On appelle **équation du premier degré à deux inconnues** est toute égalités de la forme (E) $ax+by+c=0$ où x et y sont les deux inconnues.

Remarque

- L'ensemble des couples $(x;y)$ qui vérifient l'équation (E) est l'ensemble des solutions de l'équation (E) qui est inclut dans $\mathbb{R}^2$.
- ⋆ La résolution de l'équation (E) se fait par deux méthodes : la première est de calculer x en fonction de y et la deuxième est de calculer y en fonction x.

  ⋆ L'ensemble des solutions de l'équation (E) où $(a;b) \neq (0;0)$ est un ensemble infini

  ⋆ La droite d'équation $ax+by+c=0$ est la représentation graphique de l'ensemble des solutions de l'équation (E).

EXEMPLES ET APPLICAATION

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les équations suivantes :

⋆ (E_1) $2x-y=3$ ⋆ (E_2) $2x-5=0$ ⋆ (E_3) $5y-3=0$ ⋆ (E_4) $\sqrt{2}x-2y+5\sqrt{6}=0$

2 Système de deux équations du premier degré à deux inconnues

Définition

Soit a, b, c, a', b' et c' des nombres réels.

⋆ Le système (S) : $\begin{cases} ax+by &= c \\ a'x+b'y &= c' \end{cases}$ est appelé **système de deux équations** du premier degré à deux inconnues x et y.

⋆ Le nombre $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab'-a'b$ est appelé **déterminant** du système (S).

Remarque

Résoudre le système (S) c'est déterminer tous les couples $(x;y)$ qui vérifient simultanément les deux équations : $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$.

Exemples et applicaation

1) Résoudre en utilisant la méthode de substitution le système suivant (S_1) : $\begin{cases} 2x-y & =7 \\ 3x+4y & =12 \end{cases}$.

1) Résoudre en utilisant la méthode de combinaison linéaire le système suivant (S_2) : $\begin{cases} 2x+y & =3 \\ 3x-4y & =7 \end{cases}$.

Propriété

On considère le système (S) : $\begin{cases} ax+by & =c \\ a'x+b'y & =c' \end{cases}$. On pose : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} b$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ et $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$.

- ⋆ Le système (S) admet une seule solution, si et suelement si, $\Delta \neq 0$. Dans ce cas la solution de ce système est le couple $(x;y)$ défini par : $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$ et $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$.
- ⋆ Le système (S) n'admet pas de solution, si et suelement si, $\Delta = 0$ et $(\Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0)$.
- ⋆ Le système (S) admet une infinité de solutions, si et suelement si, $\Delta = 0$ et $(\Delta_x = 0$ et $\Delta_y = 0)$.

Remarque

- ▶ Lorsque $\Delta \neq 0$, on dit que le système (S) est un système de Cramer.
- ▶ La dernière proposition suggère une nouvelle méthode de résolution du système (S). Cette méthode est appelé **méthode du déterminant** ou **méthode de Cramer**.
- ▶ **Interprétation graphique :** soit les deux droites (D) : $ax+by=c$ et (D') : $a'x+b'y=c'$.
  - ⋆ Le système (S) admet une seule solution, si et seulement si, les deux

droites (D) et (D') sont sécantes.

- ⋆ Le système (S) admet une infinité de solutions, si et seulement si, les deux droites (D) et (D') sont confondues.
- ⋆ Le système (S) n'admet pas de solutions, si et seulement si, les deux droites (D) et (D') sont strictement parallèles.

Exemples et applicaation

Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} 3x-4y & =-11 \\ 5x+6y & =7 \end{cases} \quad ; \quad (S_2) : \begin{cases} \frac{1}{2}x-3y & =1 \\ x-6y & =2 \end{cases} \quad ; \quad (S_3) : \begin{cases} \sqrt{2}x-y & =2\sqrt{2} \\ -2x+\sqrt{2}y & =3 \end{cases}$$

3 Signe de $ax+by+c$ - régionnement du plan

Propriété

Le plan est rapporté à un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. Soit (D) la droite d'équation $ax+by+c=0$.
La droite (D) détermine deux demi-plans ouverts telle que :

- ▶ Le premier demi-plan est l'ensemble des point $M(x;y)$ qui vérifient : $ax+by+c>0$.
- ▶ Le deuxième demi-plan est l'ensemble des point $M(x;y)$ qui vérifient : $ax+by+c<0$.

Exemples et applicaation

- ▶ Déterminer graphiquement l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui vérifient : $2x+3y-12>0$.
- ▶ Résoudre graphiquement l'inéquation : $x>-3$.
- ▶ Résoudre graphiquement les deux inéquations suivantes :
  $a)$ $2x-3y+5\geq 0$; $b)$ $y-1<0$
- ▶ Résoudre graphiquement le système : $(S) : \begin{cases} 2x-3y+5<0 \\ x-2y>0 \end{cases}$.

III Équation et inéquation du second degré à une inconnue

1 Équation du second degré à une inconnue

Définition

Soit a, b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$. On appelle **équation du deuxième degré** à une inconnue toute égalité de la forme $ax^2+bx+c=0$ où x est l'inconnue.

Remarque

Tout nombre réel qui vérifie l'équation $ax^2+bx+c=0$ est solution de cette équation et est dit aussi racine du polynôme ax^2+bx+c.

Activité

Soit a, b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) $ax^2+bx+c=0$.

1. Montrer que $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{(2a)^2}\right]$.
2. On pose $\Delta = b^2-4ac$. On a donc $ax^2+bx+c=0$, si et seulement si, $\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{(2a)^2}\right] = 0$.
   - a. On suppose que $\Delta = 0$. Vérifier que $ax^2+bx+c=0$, si et seulement si, $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$. Puis Résoudre l'équation (E).
   - b. On suppose que $\Delta > 0$. Vérifier que $ax^2+bx+c=0$, si et seulement si, $\left(x-\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$. Puis Résoudre l'équation (E).
   - c. On suppose que $\Delta < 0$.Montrer que l'équation (E) n'admet pas de solution.

Définition

Soit a, b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) $ax^2+bx+c=0$.

- ⋆ Le nombre réel $\Delta = b^2-4ac$ est appelé **discriminant** de l'équation (E) ou discriminant du binôme ax^2+bx+c.
- ⋆ L'écriture $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{(2a)^2}\right]$ est appelé **la forme canonique** du trinôme ax^2+bx+c.

Propriété

1 Soit a, b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) $ax^2+bx+c=0$. Et soit S et Δ sont respectivement l'ensemble de solutions et le discriminant de l'équation (E).

- ⋆ Si $\Delta < 0$ alors l'équation (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ et on a $S=\emptyset$.
- ⋆ Si $\Delta = 0$ alors l'équation (E) admet une seule solution $-\dfrac{b}{2a}$ et on a $S=\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.
- ⋆ Si $\Delta > 0$ alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et on a $S=\left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$.

Exemples et applicaation

- ▶ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

  $(1)\ x^2+4x-5=0 \quad ; \quad (2)\ 2x^2+5x+7=0 \quad ; \quad (3)\ 4x^2+4\sqrt{5}x+5=0$

- ▶ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

  $(E_1)\ x^2-6x+8=0 \quad ; \quad (E_2)\ 2x^2+x-2=0 \quad ; \quad (E_3)\ 3x^2+2x+1=0$

  $(E_4)\ 9x^2+2x+\dfrac{1}{9}=0 \quad ; \quad (E_5)\ 2x^2+x+3=0 \quad ; \quad (E_6)\ 4x^2-4\sqrt{3}x+3=0$

Remarque

- ▶ Si $\Delta > 0$, les deux solutions distinctes de l'équation $ax^2+bx+c=0$ sont souvent notées x_1 et x_2 ou x' et x''.
- ▶ Si $\Delta = 0$ alors $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-b}{2a}$. On dit dans ce cas que l'équation admet $\dfrac{-b}{2a}$ comme solution double.
- ▶ Si $ac<0$ alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions distinctes.

Propriété

Soit a, b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$. On considère le trinôme $P(x)=ax^2+bx+c$. Et soit Δ son discriminant.

- ⋆ Si $\Delta > 0$ alors $P(x)=ax^2+bx+c=a\left(x-\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.
- ⋆ Si $\Delta = 0$ alors $P(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$.

⋆ Si $\Delta < 0$ alors le trinôme $P(x)$ n'est pas factorisé dans $\mathbb{R}$ en produit de binômes.

EXEMPLES ET APPLICAATION

Factoriser les trinômes suivants :

$P(x) = 2x^2 - x - 1$; $Q(x) = -4x^2 + 4\sqrt{3}x - 3$; $R(x) = x^2 + x + 1$

$L(x) = 4x^2 + 5x + 1$; $H(x) = 25x^2 - 10\sqrt{2}x + 2$; $K(x) = -3x^2 + 2x - 7$

Propriété

Soit a, b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$. On considère l'équation (E) $ax^2 + bx + c = 0$. Et soit Δ son discriminant.

Si $\Delta \geq 0$, alors les deux solutions x_1 et x_2 de l'équation (E) vérifient : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

EXEMPLES ET APPLICAATION

- Déterminer la somme et le produit des deux racines de chacun des deux polynômes suivants : $P(x) = -2x^2 + 3x - 1$ et $Q(x) = x^2) - \left(3 + \sqrt{2}\right)x + 3\sqrt{2}$
- Sachant que 1 est une solution de l'équation $x^2 - \left(1 + \sqrt{2}\right)x + \sqrt{2} = 0$. Déterminer α l'autre solution de cette équation.
- Étudier le signe des deux racines du trinôme $H(x) = -3x^2 + 7x + 1$ (sans déterminer ces deux racines).

Remarque

- La propriété 3 nous permet de :
  - ⋆ Calculer la somme et le produit des deux solutions d'une équation du second degré sans déterminer (ou connaître) ses solutions.
  - ⋆ Déterminer l'une des solutions connaissant l'autre.
  - ⋆ Vérifier la validité des solutions trouvées.
  - ⋆ Préciser le signe des solutions sans déterminer (ou connaître) ses solutions.

Propriété

Soit S et P deux nombres réels.

Le système $\begin{cases} u+v=S \\ uv=P \end{cases}$ d'inconnues u et v, admet une solution $(u;v)$ si et seulement si S^2-4P.

De plus les réels u et v sont les solutions de l'équation : $X^2-SX+P=0$

Exemples et applicaation

- Résoudre les deux systèmes suivants : $\begin{cases} u+v=5 \\ uv=-6 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=\dfrac{3}{2} \\ xy=-1 \end{cases}$
- Sans calculer le discriminant, résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes :
  (1) $x^2+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{6}=0$; (2) $x^2-4\sqrt{3}x+9=0$

Remarque

- Il faut faire la distinction entre l'ensemble des solutions de l'équation $X^2-SX+P=0$ et l'ensemble des solutions du système $\begin{cases} u+v=S \\ uv=P \end{cases}$.
- Les solutions de l'équation $X^2-(\alpha+\beta)X+\alpha\beta=0$ sont α et β.

2 Signe d'un trinôme du second degré

Propriété

Soit a, b et c trois nombres réels tels que $a\neq 0$. On considère le trinôme $P(x)=ax^2+bx+c$. Et soit Δ son discriminant.

- ⋆ Si $\Delta<0$ alors le signe de $P(x)$ est le signe de a pour tout x de $\mathbb{R}$.
- ⋆ Si $\Delta=0$ alors le signe de $P(x)$ est le signe de a pour tout x de $\mathbb{R}$.
- ⋆ Si $\Delta>0$ aalors le signe de $P(x)$ est :
  - ⋆ le signe de a à l'extérieur des racines ;
  - ⋆ le signe contraire de a à l'intérieur des racines ;

Tableau de signe d'un trinôme :

- Si $\Delta < 0$ le tableau de signe du trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ est :

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	

- Si $\Delta = 0$ le tableau de signe du trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ est :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta > 0$ le tableau de signe du trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ est : (où $x_1 < x_2$)

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Exemples et applicaation

Étudier le signe des trinômes suivants :

$$P(x) = -3x^2 + x - 2 \quad ; \quad Q(x) = 2x^2 - x - 1 \quad ; \quad R(x) = 16x^2 - 8\sqrt{3}x + 3$$
$$G(x) = 3x^2 - 2x + 5 \quad ; \quad H(x) = -x^2 - 2x + 15 \quad ; \quad K(x) = -5x^2 + 10\sqrt{5}x + 25$$

3 Inéquation du second degré

Définition

Soit a, b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$. On considère le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$.
On appelle **inéquation du second degré** d'une seule inconnue toute inégalité de la forme : $P(x) > 0$, $P(x) \geq 0$, $P(x) < 0$ ou $P(x) \leq 0$.

Remarque

- Tout nombre réel t vérifiant l'inégalité $P(x) \geq 0$ (c.à.d $P(t) \geq 0$) est une solution de l'inéquation $P(x) \geq 0$;

► Pour résoudre l'inéquation $P(x) \geq 0$ on suit les étapes suivantes :

- ⋆ On résout l'équation $P(x) = 0$;
- ⋆ Suivant le signe de son discriminant Δ on dresse le tableau de signe du trinôme $P(x)$;
- ⋆ à partir du tableau de signe de $P(x)$ on déduit l'ensemble de solutions de $P(x) \geq 0$.

EXEMPLES ET APPLICAATION

Étudier le signe des trinômes suivants :

$$x^2 - 7x + 12 \geq 0 \quad ; \quad -3x^2 + x - 1 \leq 0 \quad ; \quad 16x^2 + 8\sqrt{3}x + 3 < 0$$
$$3x^2 - 2x - 8 > 0 \quad ; \quad -x^2 - 2x + 15 \leq 0 \quad ; \quad -5x^2 + 10\sqrt{5}x + 25 < 0$$