Angles inscrits et angles au centre

I Rappel de propriétés importantes

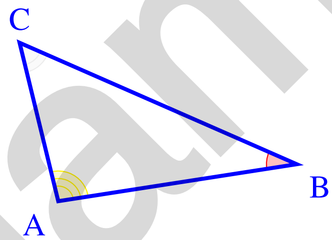
Proposition

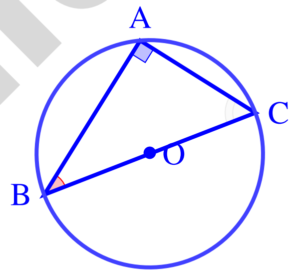
☆ La somme des mesure des angles d'un triangle est égale à 180°
$\widehat{ABC}+\widehat{BCA}+\widehat{CAB}=180°$

☆ L'angle $\widehat{BOC}$ est plat, c'est à dire que : $\widehat{BOC}=180°$

☆ Si le triangle ABC est inscrit dans un cercle de diamètre $[BC]$, alors le triangle ABC est rectangle en A, c'est à dire que : $\widehat{BAC}=90°$

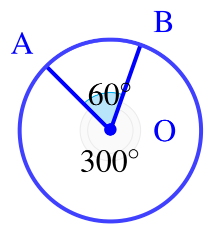
☆ Si l'un des côtés d'un triangle est un diamètre de son cercle circonscrit, alors ce triangle est rectangle au sommet opposé à ce côté





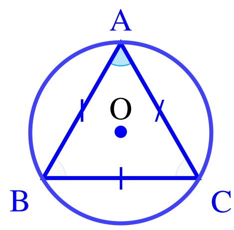
Proposition

un angle complet est égale à 360°
On a $\widehat{AOB}+\widehat{AOB}=360°$
Donc $\widehat{AOB}=360°-\widehat{AOB}$
Donc $\widehat{AOB}=300°$



Proposition

Dans un triangle équilatéral, les trois angles sont égaux à 60°
C'est à dire $\widehat{ABC}=\widehat{BCA}=\widehat{CAB}=60°$



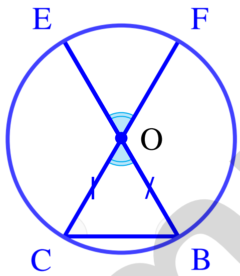
Proposition

Dans le triangle isocèle OBC on a :

☆ $OB = OC$ car ils sont tous les deux des rayons

☆ $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$ car ils sont les angles de la base

☆ Les angles opposés par le sommet sont égaux, c'est à dire : $\widehat{BOC} = \widehat{EOF}$



Proposition

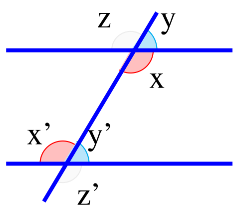
(Deux droites parallèles et une sécante)

Dans la figure ci-contre, on a $(D) \parallel (D')$ et (Δ) est une droite qui coupe (D) et (D')

☆ $x = x'$ car ils sont deux angles alternes-internes

☆ $y = y'$ car ils sont deux angles alternes-externes

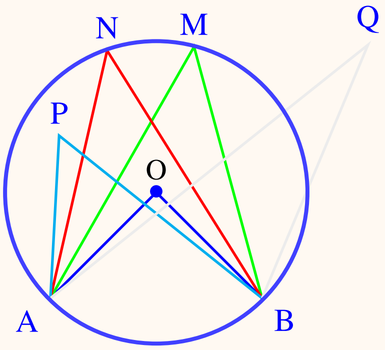
☆ $z = z'$ car ils sont deux angles correspondants



Activité

On considère la figure ci-contre

1. Déterminer les angles dont le sommet est sur le cercle et ces deux côtés coupent le cercle en deux points (ces angles s'appellent angles inscrits)
2. Déterminer les angles dont le sommet est le centre du cercle (ces angles s'appellent angles au centre)
3. Déterminer les angles qui ne sont ni inscrits ni au centre
4. Déterminer un angle inscrit et un angle au centre qui lui est associé (c'est à dire interceptent le même arc); que remarquez-vous ?
5. Déterminer deux angles inscrits qui interceptent le même arc. Que remarquez-vous ?



Solution

1. Les angles inscrits sont : $\widehat{ANV}$, $\widehat{AMB}$, $\widehat{MAB}$, $\widehat{MNB}$, $\widehat{NBM}$, et $\widehat{NAM}$
2. Les angles au centre sont : $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOM}$, $\widehat{MON}$, $\widehat{NOA}$, $\widehat{MOA}$ et $\widehat{NOB}$

3 Les angles $\widehat{APB}$ et $\widehat{AQB}$, ne sont ni inscrits ni au centre

4 L'angle $\widehat{AMB}$, est un angle inscrit, et l'angle $\widehat{AOB}$, est l'angle au centre qui lui est associè car ils interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$
On remarque que : $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$

5 Les deux angles $\widehat{NBM}$ et $\widehat{NAM}$ sont deux angles inscrits et qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{MN}$
On remarque que : $\widehat{NBM} = \widehat{NAM}$

II Angle inscrit

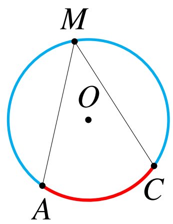
1 Définition

Définition

Un angle inscrit dans un cercle est un angle dont le sommet est sur le cercle et dont les côtés coupent le cercle en deux points

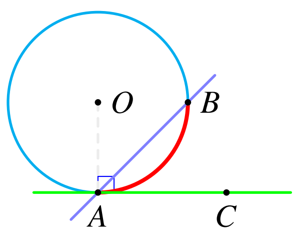
✿ Figure géométrique :

Soit (C) le cercle de centre O
A, M et C sont trois points du cercle
L'angle $\widehat{AMC}$ est inscrit intercepte l'arc $\overset{\frown}{AC}$



2 Cas particulier

On considère la figure ci-contre tel que (AC) est une tangente au cercle (C) au point A
L'angle $\widehat{BAC}$ est un angle inscrit au cercle (C)
Il intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$



III Angle au centre

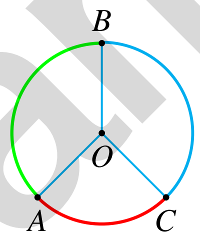
Définition

Un angle au centre est un angle dont le sommet est le centre du cercle et intercepte un arc dans ce cercle

Exemple

☆ L'angle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$

☆ L'angle $\widehat{AOC}$ est un angle au centre qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{AC}$



IV Propriétés

1 Angle inscrit et angle au centre associé

a Définition

Définition

Un angle au centre est associè à un angle inscrit s'ils interceptent le même arc

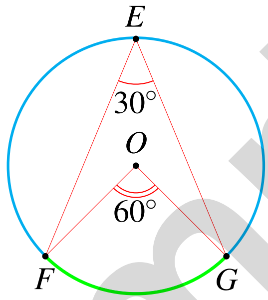
b Proposition

Proposition

La mesure de l'angle au centre est égale au double de celle de l'angle inscrit qui intercepte le même arc

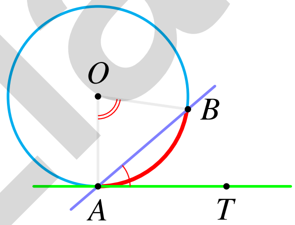
• Exemple

On considère la figure ci-contre
L'angle $\widehat{FOG}$ est un angle au centre et l'angle $\widehat{FEG}$ est un angle inscrit et qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{FG}$
Donc $\widehat{FOG} = 2\widehat{FEG}$ et $\widehat{FEG} = \frac{1}{2}\widehat{FOG}$



c Cas particulier

Soit (C) un cercle de centre O
(AT) est la tangente du cercle (C) au point A et B un point du cercle (C) distinct de A



☆ L'angle $\widehat{BAT}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$

☆ L'angle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre et intercepte le même arc $\overset{\frown}{AB}$

Donc $\widehat{AOB} = 2\widehat{BAT}$ et $\widehat{BAT} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$

2 Deux angles inscrits interceptant le même arc

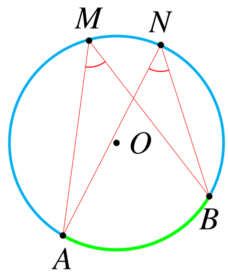
a Proposition

Proposition

Deux angles inscrits interceptant le même arc ont la même mesure (isométriques)

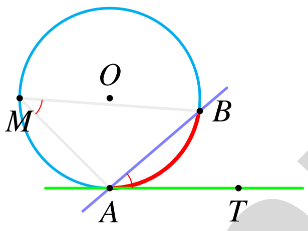
• Exemple

Dans la figure, ci-contre, on a $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont deux angles inscrits qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$
Donc $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$



b Cas particulier

Soit (C) un cercle de centre O
(AT) est la tangente du cercle (C) au point A et B et M deux points du cercle (C) distinct de A



☆ Les angles $\widehat{BAT}$ et $\widehat{BMA}$ sont des angles inscrits qui interceptent l'arc $\overset{\frown}{AB}$

Donc $\widehat{BMA} = \widehat{BAT}$

Remarque

☆ L'arc $\overset{\frown}{AB}$ qui ne contient pas le point M s'appelle le petite arc $\widehat{AOB} < 180°$

☆ L'arc $\overset{\frown}{AB}$ qui contient le point M s'appelle le grand arc $\widetilde{AOB} > 180°$