Chapitre

Les suites numériques

EXO 1BSM

I Sèrie d'exercice

Exercice

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

On pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 < u_n \leq 2$.
2. Montrer que $(u_n)_n$ est décroissante.
3. Montrer que $(v_n)_n$ est une suite arithmétique.
4. Déterminer u_n en fonction de n puis calculer

$$S_{2023} = \sum_{k=0}^{2022} v_k$$

Exercice

$(u_n)_n$ une suite telle que : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 3}{4 - u_n} \end{cases}$ Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$;

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq u_n \leq 3$.
2. Etudier la monotonie de $(u_n)_n$
3. a. Montrer que $(v_n)_n$ est géométrique.
   b. Calculer u_n en fonction de n.
   c. Déterminer : $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $P_n = \prod_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de n

Exercice

Soit $(u_n)_n$ la suite telle que :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{8u_n - 8}{u_n + 2} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 < u_n < 4$.
2. Etudier la monotonie de $(u_n)_n$.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2}$; Prouver que $(v_n)_n$ est une suite géométrique.
4. Déterminer v_n en fonction de n.
5. Déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{4\times 3^n + 2^{n+1}}{3^n + 2^n}$.

Exercice

Soit $(u_n)_n$ la suite telle que :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n \end{cases}$$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \geq 1$.
2. Montrer que $(u_n)_n$ est croissante.
   a. Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} \geq 2u_n$.
   b. En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \geq 2^n$.

Exercice

Soit (u_n) , (v_n)et (w_n) les suites numériques définies par :

$$\begin{cases} u_n = -1 : u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4} u_n ; \end{cases}, v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n \text{ et } w_n = \frac{u_n}{v_n} ; (n \in \mathbb{N})$$

1. Montrer (v_n) est une suite géométrique.
2. Montrer que (w_n) est une suite arithmétique.
3. En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

Exercice

$(u_n)_n$ une suite telle que $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 4n - u_n \end{cases}$

1. Calculer $u_1 ; u_2 ; u_3$ et u_4.
2. Montrer que $(u_{2n})_n$ est arithmétique.

3 Déterminer u_{2n} puis u_{2n+1} en fonction de n.

4 Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $v_n = u_n + 1 - 2n$. Prouver que $(v_n)_n$ est géométrique.

5 Déterminer v_n et u_n en fonction de n.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = \frac{8(u_n-1)}{u_n+2} \end{cases}$

1
- a Calculer u_1.
- b Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} - 4 = \frac{4(u_n-4)}{u_n+2}$ et $u_{n+1} - 2 = \frac{6(u_n-2)}{u_n+2}$.
- c Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 2 < u_n < 4$

2
- a Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
- b En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 3 \leq u_n < 4$.

3
- a Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$.
- b En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

Exercice

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = 2u_n + 1 (\forall n \in \mathbb{N})$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $v_n = u_n - \alpha$

1 Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \geq n$.

2 Déduire que (u_n) n'est pas majorée.

3 Déterminer α pour que $(v_n)_n$ soit géométrique.

4 On prend $\alpha = -1$ et on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ déterminer v_n et u_n en fonction de n puis S_n en fonction de n.

Exercice

On considere la suite $(u_n)_n$ définie par :
$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{7u_n+6}{u_n+2}$;

1. a. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < u_n < 6$.
   b. Etudier la monotonie de $(u_n)_n$.
2. On pose $v_n = \frac{u_n - 6}{u_n + 1}$ pour tout entier
   a. Montrer que $(v_n)_n$ est une suite geométrique.
   b. Déterminer u_n en fonction de n.
3. Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1} - 6| \leq \frac{1}{2}|u_n - 6|$$

4. Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_n - 6| \leq 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$