Chapitre

Cours 2BECO

Limites des suites numériques

I La fonction Exponentielle Népérien exp :

1 Définition et Propriétés :

Activité

1. Montrer que la fonction $x \mapsto lnx$ admet une fonction réciproque.

$\boxed{\text{Pour l'instant On note } ln^{-1} = exp.}$

2. a) Montrer que $D_{exp} = \mathbb{R}$
   b) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad ln(exp(x)) = x$ et que $(\forall x \in]0;+\infty[) \quad exp(ln(x)) = x$.
3. Montrer que $x \mapsto exp(x)$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que : $exp(0) = 1$ et $exp(1) = e$ et $(\forall x \in \mathbb{R})\ exp(x) > 0$.

D **Définition**

La fonction réciproque de la fonction Logarithme Népérien s'appelle la fonction Exponentielle Népérien Noté **exp**.

Remarque

- $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*\ exp(x) = y \iff x = ln(y)$

Propriété

1. la fonction $x \mapsto \mathbf{exp}(x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$.
2. $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad ln(exp(x)) = x$ et $\forall x \in]0;+\infty[\quad exp(ln(x)) = x$.
3. $\boxed{exp(0) = 1}$ $\boxed{exp(1) = e}$.
4. $x \mapsto \mathbf{exp}(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, Donc :
   $\boxed{x < y \iff \mathbf{exp}(x) < \mathbf{exp}(y)}$ $\boxed{x = y \iff \mathbf{exp}(x) = \mathbf{exp}(y)}$

Application

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
  - $exp(x+3) = exp(x^2 - 4x + 9)$
  - $exp(\frac{x}{3x-1}) = exp(x+1)$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
  - $exp(-x+3) + 1 > 2$
  - $exp(2x) - exp(x) - 2 \leq 0$.

Chapitre : Limites des suites numériques

2 La courbe de la fonction Exponentielle Népérien :

Activité

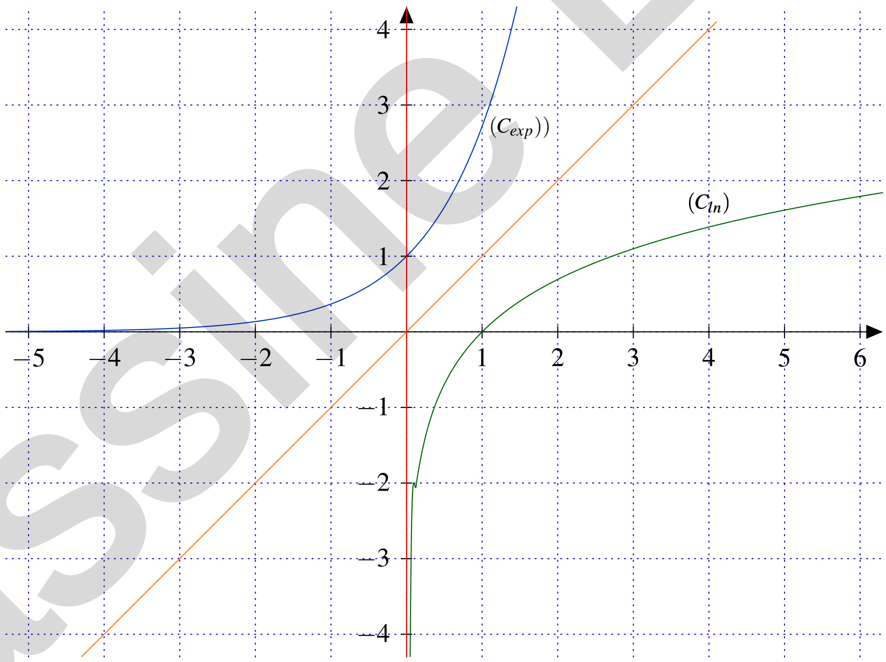
Soit $\mathscr{C}_{exp}$ la courbe de la fonction exp :

1. Montrer que $x \mapsto exp(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et Déterminer sa dérivée sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} exp(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} exp(x) = 0$.
3. Montrer que $\mathscr{C}_{exp}$ est convexe sur $\mathbb{R}$. et tracer $\mathscr{C}_{exp}$ par deux méthodes dans un repère orthonormé.

Propriété

- La fonction $x \mapsto exp(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$ $\boxed{exp'(x) = exp(x)}$.
- De plus $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} exp(x) = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} exp(x) = 0}$.

La figure ci-dessous donne les représentations graphiques des deux fonctions :



3 Les propriétés de la fonction exp :

Activité

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$

1. Montrer que $exp(a+b) = exp(a) \times exp(b)$.
2. Montrer que $exp(-a) = \dfrac{1}{exp(a)}$ et déduire que $exp(a-b) = \dfrac{exp(a)}{exp(b)}$.
3. Montrer que $exp(r.a) = [exp(a)]^r$.

4 Déduire que $exp(r) = e^r$ ($e \approx 2.718$ la constante d'Euler).

Propriété

1 $\boxed{(\forall a,b \in \mathbb{R})\ exp(a+b) = exp(a) \times exp(b)}$.

2 $\boxed{(\forall a,b \in \mathbb{R})\ exp(a-b) = \dfrac{exp(a)}{exp(b)}}$. $\boxed{(\forall a \in \mathbb{R})\ exp(-a) = \dfrac{1}{exp(a)}}$.

Propriété

1 $\boxed{(\forall r \in \mathbb{Q})\ exp(r) = e^r}$.

2 On admet qu'on peut faire une extension de la dernière relation sur $\mathbb{R}$

CÀD $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R})\ exp(x) = e^x}$.

On peut donc donner une nouvelle écriture pour la fonction Exponentielle Népérien exp : $\boxed{x \mapsto e^x}$

Remarque

On peut réécrire les propriétés de la la fonction $x \mapsto e^x$ comme suit :

- $(\forall x \in \mathbb{R})$ $ln(e^x) = x$ et $\forall x \in]0;+\infty[$ $e^{ln(x)} = x$.
- $\boxed{e^0 = 1}$ $\boxed{e^1 = e}$.
- $\boxed{x < y \iff e^x < e^y}$ $\boxed{x = y \iff e^x = e^y}$
- $(\forall a,b \in \mathbb{R})$ $\boxed{e^{a+b} = e^a \times e^b}$ $\boxed{e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}}$ $\boxed{\text{Si } r \in \mathbb{Q}\ e^{ra} = (e^a)^r}$

4 Les limites de référence de la fonction $x \mapsto e^x$:

Activité

1 Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ et Déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - 1}{x}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.

2 Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} x.e^x = 0$.

3 Déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n.e^x = 0$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Propriété

1. $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}=1}$ et $\boxed{\forall a\in\mathbb{R}^*. \lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{x}=a}$
2. $\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x}=+\infty}$ et $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^n}=+\infty}$
3. $\boxed{\lim_{x\to -\infty} x.e^x=0}$ et $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $\boxed{\lim_{x\to -\infty} x^n.e^x=0}$

Application

1. Simplifier les expressions suivantes : ▶ $\frac{e^3.e^{\sqrt{2}}}{e^2.e^{-\sqrt{2}}}$ ▶ $\sqrt{\frac{e^e}{e^{2e}.e^{-e}}}$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :
   ▶ $e^{3x}-4=0$ ▶ $\frac{e^{-x}-3e}{e^{-x}-e}=4$ ▶ $2e^{-x}-e^x=-2$
   ▶ $e^x-ln4<0$ ▶ $e^x-3\sqrt{e^x}+4\geq 0$
3. Calculer les limites suivantes :
   ▶ $\lim_{x\to 0} \frac{e^{sinx}-1}{tanx}$ ▶ $\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{1-e^x}$
   ▶ $\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x-1}$ ▶ $\lim_{x\to +\infty} e^{3x}-lnx$

Remarque

1. Si $u(x)$ est une fonction dérivable sur un intervalle I Alors la fonction $x\mapsto e^{u(x)}$ est dérivable et : $\boxed{(e^{u(x)})'=u'(x).e^{u(x)}}$
2. Soit $a\in\mathbb{R}^*$, Les fonctions primitive d'une fonction f de la forme $f(x)=a.u'(x).e^{u(x)}$ sont $F(x)=a.e^{u(x)}+\lambda$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

Application

1. Déterminer la dérivée de f dans les cas suivants :
   ▶ $f(x)=xe^{x^2+3}$ ▶ $f(x)=\frac{x^2}{e^{x^3}}$ ▶ $f(x)=\frac{e^{x+1}}{x.e^x}$
2. Déterminer une primitive de f dans les cas suivants :
   ▶ $f(x)=xe^{x^2+3}$ ▶ $f(x)=\frac{x^2}{e^{-x^3+4}}$ ▶ $f(x)=\frac{(x+1)e^x}{x.e^x+1}$

II Les fonctions Exponentielle de base a :

1 Définition et Propriétés :

Activité

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*/\{1\}$. Pourquoi la fonction logarithme de base a admet une fonction réciproque sur $\mathbb{R}_+^*$. $\boxed{\text{Pour l'instant On note } log_a^{-1} = exp_a.}$
2. Montrer que $D_{exp_a} = \mathbb{R}$. et que $x \mapsto exp_a(x)$ est continue.
3. Déterminer les variations de $x \mapsto exp_a(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que : $exp_a(0) = 1$ et $exp_a(1) = a$ et $(\forall x \in \mathbb{R})$ $exp_a(x) > 0$.

D **Définition**

• Soit $a \in \mathbb{R}_+^*/\{1\}$, La fonction réciproque de la fonction log_a Logarithme de base a s'appelle la fonction Exponentielle de base Noté $\mathbf{exp_a}$.

Remarque

- Si $0 < a < 1$ Alors la fonction Exponentielle de base a $\mathbf{exp_a}$ est décroissante.
- Si $a > 1$ Alors la fonction Exponentielle de base a $\mathbf{exp_a}$ est croissante.

Activité

- Soit $a \in \mathbb{R}/\{1\}$, Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $exp_a(x) = e^{xln(a)}$.
D'après cette relation on peut conclure les propriétés algébriques de l'exponentielle de base $a \neq 1$:

Propriété

Soit $a \in \mathbb{R}/\{1\}$.

1. $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\boxed{exp_a(x) = e^{xln(a)}}$
2. $(\forall x, y \in \mathbb{R})$ $\boxed{exp_a(x+y) = exp_a(x) \times exp_a(y)}$.
3. $(\forall x, y \in \mathbb{R})$ $\boxed{exp_a(x-y) = \frac{exp_a(x)}{exp_a(y)}}$. $\boxed{exp_a(-x) = \frac{1}{exp_a(x)}}$.
4. $(\forall x \in \mathbb{R})$ $(\forall r \in \mathbb{Q})$ $\boxed{exp_a(r.x) = [exp_a(x)]^r}$.

2 La fonction $x \mapsto a^x$:

Propriété

■ Si $a \neq 1$, On a $\boxed{(\forall r \in \mathbb{Q})\ exp_a(r) = a^r}$. Et on admet qu'on peut faire une extension de cette relation sur $\mathbb{R}$: CÀD $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R})\ exp_a(x) = a^x}$.

■ Nouvelle notation de la fonction Exponentielle de base $a \neq 1$: $x \mapsto a^x$

Dans toute ce qui précède On a parlé de la la fonction Exponentielle de base $a \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a \neq 1$, Il nous reste donc le cas $a = 1$.
On remarque que $(\forall r \in \mathbb{Q})\ 1^r = 1$.
Et on fait une extension dans $\mathbb{R}$ on écris $(\forall x \in \mathbb{R})\ 1^x = 1$.

- Si $a > 0$ et $a \neq 1$ Alors $\begin{cases} y = a^x \iff x = log_a(y) = \dfrac{lny}{lna} \\ \iff lny = x.lna \\ \iff a^x = y = e^{x.lna} \end{cases}$
- Si $a = 1$ Alors $(\forall x \in \mathbb{R})\ e^{x.ln1} = e^0 = 1 = 1^x$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall a > 0)$ $\boxed{a^x = e^{x.ln(a)}}$.

Propriété

On peut résumer les propriétés de la fonction $x \mapsto a^x$ comme suite :

1. Si $a > 0$ et $a \neq 1$ Alors :
   - $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in]0;+\infty[)$ $y = a^x \iff x = \dfrac{lny}{lna}$.
   - $\boxed{x < y \iff a^x < a^y}$ $\boxed{x = y \iff a^x = a^y}$
2. Si $a > 0$ Alors :
   - $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\boxed{a^x > 0}$ et $\boxed{a^0 = 1}$ $\boxed{a^1 = a}$.
   - $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})$ $\boxed{a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}}$ $\boxed{(\forall r \in \mathbb{Q})\ a^{rx} = (a^x)^r}$
   - $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\boxed{a^x = e^{x.lna}}$.
3. $(\forall a,b \in \mathbb{R}_+^*)\ (\forall x,y \in \mathbb{R})$ On a :
   - $\boxed{(ab)^x = a^x.b^x}$
   - $\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}}$
   - $\boxed{(a^x)^y = a^{xy}}$

3 La dérivée de la fonction $x \mapsto a^x$ et la fonction $x \mapsto x^\alpha$:

La dérivée de la fonction $x \mapsto a^x$:

Soit $a > 0$ On a $(\forall x \in \mathbb{R})$ $a^x = e^{x.ln(a)}$.

Donc La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$(\forall x \in \mathbb{R})$ $$(a^x)' = (e^{x.ln(a)})' = (x.ln(a))'e^{x.ln(a)} = lna.e^{x.ln(a)}$$

Donc $$\boxed{(a^x)' = a^x.ln(a)}$$

La dérivée de la fonction $x \mapsto x^\alpha$:

On a : ($\forall \alpha \in \mathbb{R}$) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ $$x^\alpha = e^{\alpha.ln(x)}$$

Donc Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ $$(x^\alpha)' = (e^{\alpha.ln(x)})' = (\alpha.ln(x))'e^{\alpha.ln(x)} = \frac{\alpha}{x}.x^\alpha$$

Donc $$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}}$$

Remarque

• Pour étudier la fonction $x \mapsto u(x)^{v(x)}$ sur un intervalle I avec u une fonction strictement positive sur I, On considère la forme suivante : $\boxed{u(x)^{v(x)} = e^{v(x).ln[u(x)]}}$