

L'ensemble $\mathbb{C}$ - forme algébrique1 L'ensemble $\mathbb{C}$

Proposition

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $\mathbb{C}$ contient un nombre noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique $z = a + ib$ avec a et b réels.
- L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.

Exemple

$$z_1 = 2 + 3i \in \mathbb{C}; \quad z_2 = -3 \in \mathbb{C}; \quad z_3 = 2i \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad z_4 = -\sqrt{7} \in \mathbb{C}$$

Remarque

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

2 Forme algébrique

D

Définition

- L'écriture $z = a + ib$ est appelée **la forme algébrique** du nombre complexe z .
- le réel a est la partie réelle de z , notée $\Re(z)$.
- le réel b est la partie imaginaire de z notée $\Im(z)$.

d'après l'unicité de l'écriture sous la forme algébrique on donc

COROLAIRE

deux nombres complexes sont égaux ssi ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire

$$\text{soit } z = a + ib \text{ et } z' = a' + ib' \text{ on a } z = z' \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

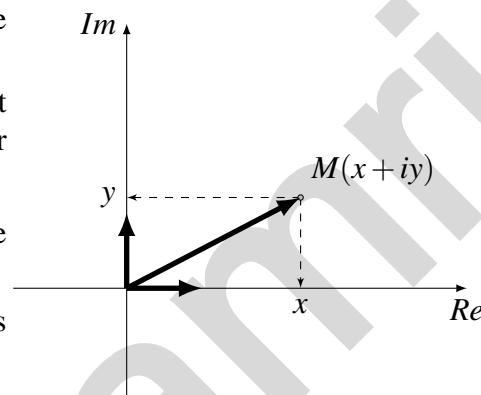
Cas particulier

- Si $\Re(z) = 0$ on dit que z est **imaginaire pure** L'ensemble des imaginaires pur est noté $i\mathbb{R}$
- Si $\Im(z) = 0$ on dit que z réel

II Représentation graphique d'un complexe

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ direct.

- A tout nombre complexe $z = x + iy$ avec x et y réel, on associe le point M de coordonnées $(x; y)$. On dit que M , ou que le vecteur $\vec{OM}$ est l'image de z . est que z est l'afixe du point M ou du vecteur $\vec{OM}$.
- L'afixe de M se note souvent z_M et celui de $\vec{OM}$ se note $\text{aff}(\vec{OM})$
- L'axe des abscisses $(O; \vec{u})$ est appelé **axe des réels**, l'axe des ordonnées
- Le plan est alors appelé plan complexe. $(O; \vec{v})$ est appelé axe des **imaginaires** purs.



Application

- 1 Placer les points A, B et C d'afixe respectif : $z_A = -1 - 2i$, $z_B = 2 - i$ et $z_C = \frac{3}{2} + i$
- 2 calculer les distance OA et AB

III Opérations sur les nombres complexes

1 Règles du calcul

Les règles de calcul sur les nombres réels s'étendent aux nombres complexes.

Application

Écrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique

- $4 - (3 - i)$
- $i(2 + 5i) + 3(2 - i)$
- $(2 - i)(3 - 2i)$
- $(3 - i)^2$
- $(\sqrt{2} - i)(\sqrt{2} + i)$
- $(2 - i)^3$
- $(a + ib)(a - ib)$
- $(a + ib)^2$

Application

- 1 Calculer $i^3, i^4, i^5, i^7, i^8, i^9$
- 2 En déduire la forme algébrique de $z_n = i^n$ en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$
- 3 Donner la forme algébrique de $i^{2001}, i^{1430}, i^{2019}$

2 Inverse d'un complexe non nul

Proposition

tout nombre complexe non nul z admet un inverse noté $\frac{1}{z}$

• Preuve

soit $z = x + iy$ avec $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\text{Alors } \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i$$

Application

Mettre sous la forme algébrique $\bullet \frac{1}{i} \bullet \frac{2}{1 - i\sqrt{3}} \bullet \frac{\sqrt{2} - i}{i\sqrt{2} + 1} \bullet \frac{2i}{1 + i}$

Application

Soient $z_1 = -1 + 2i$ et $z_2 = 1 - i$ deux nombres complexes ;

Écrire sous la forme algébrique : $\bullet z_1^2 - z_2 \bullet z_1 z_2^2 \bullet \frac{z_1}{z_2} \bullet \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$

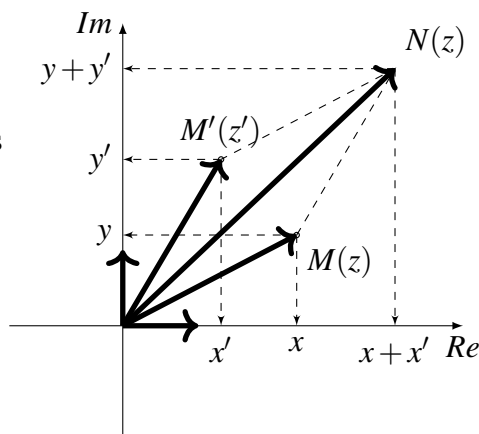
3 Interprétations géométriques

Soit M et M' deux points du plan complexe d'affixes respectives $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. N et P deux points tels que :

$$\vec{ON} = \vec{OM} + \vec{OM'} \text{ et } \vec{OP} = k\vec{OM}$$

On a $z + z' = (x + x') + i(y + y')$ et $kz = kx + iky$

$\text{aff}(\vec{ON}) = z + z'$ et $\text{aff}(\vec{OP}) = kz$



Propriété

Soit A et B deux points du plan complexes d'affixe respectives z_A et z_B
 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et k un réel

$$\blacksquare \text{aff}(\vec{AB}) = z_B - z_A$$

$$\blacksquare \text{aff}(\vec{u} + \vec{v}) = \text{aff}(\vec{u}) + \text{aff}(\vec{v}) \text{ et } \text{aff}(k\vec{u}) = k\text{aff}(\vec{u})$$

$$\blacksquare \vec{u} = \vec{v} \iff \text{aff}(\vec{u}) = \text{aff}(\vec{v})$$

$$\blacksquare \text{ Soit } I \text{ le milieu de } [AB]. \text{ on a } z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

$$\blacksquare A, B \text{ et } C \text{ sont alignés si et seulement si } \exists k \in \mathbb{R} : z_B - z_A = k(z_C - z_A)$$

Application

Dans le plan complexe munie du repère o.n.d $(O; \vec{u}; \vec{v})$; on considère les points A, B et C qui ont pour affixe respectives $z_A = -2 + i$, $z_B = 3 + 3i$ et $z_C = 1 + \frac{11}{5}i$

- 1 calculer les affixes des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$
- 2 En déduire que A, B et C sont alignés
- 3 Placer les points A, B et C

Application

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 3 + i$, $z_B = 2 - 2i$, $z_C = 2i$ et $z_D = 1 + 5i$

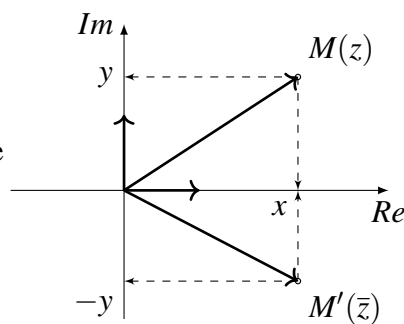
- 1 faire une figure
- 2 montrer que $ABCD$ est un parallélogramme
- 3 calculer l'affixe de son centre

IV Conjugué d'un nombre complexe**D Définition**

Soit $z = a + ib$ ($x; y$) $\in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe. on appelle **conjugué** de z noté $\bar{z}$ le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$

Interprétation géométrique

Dans le plan complexe si le point M a pour affixe z , alors l'image M' de $\bar{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe réel

**Exemple**

$$\bullet \overline{2+i} = 2-i \quad \bullet \overline{3-i\sqrt{2}} = 3+i\sqrt{2} \quad \bullet \overline{2i} = -2i \quad \bullet \overline{1+\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$$

Propriété

$$\begin{array}{llll} \blacktriangleright \bar{\bar{z}} = z & \blacktriangleright \overline{z\bar{z}} = a^2 + b^2 & \blacktriangleright \overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'} & \blacktriangleright \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'} \\ \blacktriangleright \overline{z^n} = \bar{z}^n & \blacktriangleright \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \quad (z \neq 0) & \blacktriangleright \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}} \quad (z \neq 0) & \end{array}$$

Conséquences

- $z + \bar{z} = 2\Re(z)$ et $z - \bar{z} = 2i\Im(z)$
- $z \in \mathbb{R}$ (réel) $\iff \bar{z} = z \iff \Im(z) = 0$
- $z \in i\mathbb{R}$ (imaginaire pur) $\iff \bar{z} = -z \iff \Re(z) = 0$

Exemple

Soit les nombres complexes $z_1 = \frac{2+i}{1-2i}$ et $z_2 = \frac{2-i}{1+2i}$

- 1 Vérifier que $z_1 = \bar{z}_2$, et en déduire que $z_1 + z_2$ est réel et que $z_1 - z_2$ est imaginaire pur.
- 2 Simplifier $z_1 + z_2$ et $z_1 - z_2$

Application

résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

- 1 $4\bar{z} + 2i - 4 = 0$
- 2 $(1+i)\bar{z} + 1 - i = 0$
- 3 $3\bar{z} - 2iz = 5 - 3i$
- 4 $z^2 - 3\bar{z} + 2 = 0$

Application

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $Z = z^2 + \bar{z}$ soit un réel

Application

Soit z un nombre complexe $\neq -1$. on pose $Z = \frac{z-1}{z+1}$.

- 1 On pose $z = x + iy$ déterminer $\Re(Z)$ et $\Im(Z)$ en fonction de x et y
- 2 En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tel que Z est imaginaire pur

Application

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^2 + 4z + 5$

- 1 Montrer que si z_0 est une racine de P alors $\bar{z}_0$ est aussi racine de P
- 2 Vérifier que $-2 + i$ est une racine de P et en déduire une autre racine de P

V Module d'un nombre complexe

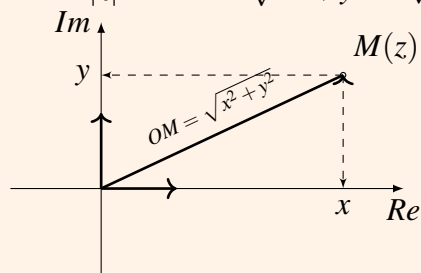
1 Définition et propriétés

D Définition

Soit M un point du plan complexe d'affixe $z = x + iy$ où $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

La distance $OM = \sqrt{x^2 + y^2} = s$ appelle **le module** de z et se note $|z|$

on a : $|z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$



Exemple

$$\bullet |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2 \quad \bullet |3i| = 3 \quad \bullet |-2| = 2$$

Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes

$$\blacksquare |z| = 0 \iff z = 0$$

$$\blacksquare |z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$\blacksquare \left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|} \quad (z \neq 0)$$

$$\blacksquare |z| \geq |\Re(z)|$$

$$\blacksquare |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Inégalité triangulaire

$$\blacksquare |\bar{z}| = |-z| = |z|$$

$$\blacksquare \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad (z \neq 0)$$

$$\blacksquare |z^n| = |z|^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\blacksquare |z| \geq |\Im(z)|$$

Application

Calculer le module de chacun des nombre complexes

1 $(2 - i)^4$

2 $\frac{3 + i\sqrt{3}}{\sqrt{2} - i}$

3 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i} \right)^8$

Application

Dans le plan complexe on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2, b = 1 + i$ et $c = -1 - 3i$

- 1 Placer les points A, B et C
- 2 Montrer que ABC est un triangle rectangle

Application

Soit z un nombre complexe non nul

Montrer que $|z| = 1 \iff z = \frac{1}{\bar{z}}$

2

Interprétation géométrique**Propriété**

Dans le plan complexe muni du repère o.n.d $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B et M d'affixes respectives z_A, z_B et z

- ▶ Distance : $AB = |z_A - z_B|$
- ▶ L'ensemble des point $M(z)$ tel que $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la médiatrice du segment $[AB]$
- ▶ L'ensemble des point $M(z)$ tel que $|z - z_A| = r$ où $(r > 0)$ est le cercle de centre A et de rayon r

• Preuve

Exercice

Application

Dans chacun des cas suivants déterminer l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tel que

- 1 $|z - 3| = 5$
- 2 $|z - 1 + 2i| = 2$
- 3 $|z - 2i| = |z + 1|$
- 4 $|\bar{z} + 2 - i| = 3$
- 5 $|iz + 2| = |\bar{z} + 2i + 1|$

Application

on considère dans le plans complexe le point A d'affixe $z_A = 1$.

A chaque point $M \neq A$ d'affixe z on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$

- 1 Montrer que $M' \in C(O; 1)$
- 2 Montrer que $\frac{z'-1}{z-1}$ est un réel, puis en déduire que A, M et M' son alignés
- 3 construire le point M' dans le cas ou $z = -2 + i$

VI Argument et forme trigonométrique d'un complexe non nul

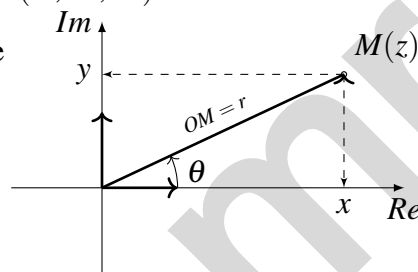
1 Argument d'un complexe non nul

a partir de ce paragraphe le plan complexe est muni du repère o.n.d($O; \vec{u}; \vec{v}$) avec $\vec{u} = \vec{OI}$ et $\vec{v} = \vec{OJ}$

À tout point $M(x, y)$ du plan distinct de O on fait associer le nombre complexe $z = x + iy$

Soit θ une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$

Posons $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Alors $\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$



D Définition

Soit M un point du plan complexe d'affixe $z = x + iy$, $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

On appelle argument de z , noté $\arg(z)$, toute mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ et on écrit

$$\arg(z) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM})[2\pi].$$

Exemple

Le plan complexe est rapporté au repère o.n.d ($O; \vec{u}; \vec{v}$)

On considère les point A, B, C et D d'affixes respectives $a = 2$, $b = 2 + 2i$, $c = -2 + 2i$ et $d = -i$

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = 0 \implies \arg(2) = 0[2\pi]$$

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4} \implies \arg(2 + 2i) = \frac{\pi}{4}2\pi$$

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OC}) = \frac{3\pi}{4} \implies \arg(-2 + 2i) = \frac{3\pi}{4}2\pi$$

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OD}) = \frac{-\pi}{2} \implies \arg(-i) = \frac{-\pi}{2}2\pi$$

Conséquences

★ Argument d'un nombre réel

- $z \in \mathbb{R}^{*+} \iff \arg(z) \equiv 0[2\pi]$
- $z \in \mathbb{R}^{*-} \iff \arg(z) \equiv \pi[2\pi]$

ainsi $z \in \mathbb{R} \iff z = 0$ ou $\arg(z) \equiv 0[\pi]$

- $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$
- $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$

★ Argument d'un imaginaire pur

- $z \in i\mathbb{R}^{*+} \iff \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}2\pi$
- $z \in i\mathbb{R}^{*-} \iff \arg(z) \equiv \frac{-\pi}{2}2\pi$

ainsi $z \in i\mathbb{R} \iff z = 0$ ou $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

2 Forme trigonométrique d'un complexe non nul

D

Définition

Le plan complexe est rapporté au repère o.n d $(O; \vec{u}; \vec{v})$

Soit M un point du plan complexe d'affixe $z \neq 0$

On pose $OM = |z| = r$ et $\theta \equiv \arg(z)[2\pi]$

L'écriture $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ est appelée **forme trigonométrique** de z

Exemple

Soit $z = 1 + i\sqrt{3}$

On a : $|z| = \sqrt{1+3} = 2$

Donc $z = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3}))$

Ainsi $2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3}))$ est une forme trigonométrique de $1 + i\sqrt{3}$

3 Relation entre forme algébrique et forme trigonométrique

Proposition

Soit z un complexe non nul

Si $z = x + iy$ est la forme algébrique de z et $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ une forme trigonométrique de z

$$\text{Alors } r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{\Re(z)}{|z|} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{\Im(z)}{|z|} \end{cases}$$

Exemple

• Soit $z = 2 + 2i$, On a : $|z| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

Donc $z = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 2(\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4}))$

• soit $z_2 = 4(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i \sin(\frac{2\pi}{3}))$

On a $\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ et $\sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $z_2 = -2 + 2\sqrt{3}i$

Exemple

Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants

- $z_1 = \sqrt{3} + 3i$
- $z_2 = -2 + 2i$

- $z_3 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$
- $z_4 = -3 - 3i$

4 Propriétés des arguments

Proposition

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, on a :

- $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$
- $\arg(z^n) = n \arg(z) [2\pi]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) [2\pi]$

Conséquences

Notons $r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ par $[r, \theta]$

Si $z = [r, \theta] [2\pi]$ et $z' = [r', \theta'] [2\pi]$ avec $(r, r') \in (\mathbb{R}^{*+})^2$ et $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ Alors on a :

- $\bar{z} = [r, -\theta] [2\pi]$
- $-z = [r, \pi + \theta] [2\pi]$
- $z \times z' = [r \times r', \theta + \theta'] [2\pi]$
- $\frac{1}{z} = [\frac{1}{r}, -\theta] [2\pi]$
- $\frac{z'}{z} = [\frac{r'}{r}, \theta' - \theta] [2\pi]$
- $z^n = [r^n, n\theta] [2\pi]$

Application

Écrire sous la forme trigonométrique les nombre complexe suivants

- 1 $z_1 = (\sqrt{3} - i)^{11}$
- 2 $z_2 = \frac{1+i}{2i}$
- 3 $z_3 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2 + 2i}$
- 4 $z_4 = (1 + i \tan(\frac{\pi}{8}))(-1 + i)$

Application

On considère les nombres complexes $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

- 1 Écrire sous la forme algébrique les nombres complexes suivant
 - iz_1 • $\bar{z}_1$ • $z_1 \times z_2$ • $(z_1 \times z_2)^{12}$
- 2 Écrire $z_1 \times z_2$ sous la forme algébrique

- 3 En déduire les lignes trigonométrique de $\frac{\pi}{12}$

5 Interprétation géométrique de l'argument

Propriété

Soit A, B, C , et D quatre points deux à deux distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D

- $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) [2\pi]$
- $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$
- $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$

Application

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z satisfaisants la condition

- $\arg(z - 1 - 2i) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$
- $\arg(iz) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z - 1 + 2i}{z + 1}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Conséquences

- trois points distincts A, B , et C sont alignés $\iff (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0[\pi] \iff \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0[\pi]$
- les droites (AB) et (CD) sont parallèles $\iff (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = 0[\pi] \iff \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right) = 0[\pi]$
- les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires $\iff (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}[\pi] \iff \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$

Application

A, B, C trois point d'affixe respectives $z_A = 2i, z_B = 2 + i, z_C = 1 - i$

- 1 Écrire le complexe $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ sous la forme trigonométrique et algébrique
- 2 En déduire la nature du triangle ABC

Application

A, B, C trois point d'affixe respectives $z_A = 1 + i, z_B = 3 + 5i, z_C = 2 + 2\sqrt{3} + i(3 - \sqrt{3})$

- 1 calculer AB et AC , en déduire la nature de ABC
- 2 Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

3 En déduire que ABC est un triangle équilatérale

VII Forme exponentielle d'un nombre complexe

1 Définition

D

Définition

Le nombre complexe de module 1 et d'argument θ sera noté $e^{i\theta}$:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Exemple

- ☐ $e^{i\pi} = -1$
- ☐ $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

2 Cas générale

Nous avons vu que tous nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

D

Définition

$z = re^{i\theta}$. est une forme exponentielle d'un complexe de module r et dont θ est un argument :

$$z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

3 Opérations sur les forme exponentielles

T

Théorème

Soient r et r' deux réels strictement positives et θ et θ' deux réels

- $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
- $-re^{i\theta} = re^{i(\pi + \theta)}$
- $\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$
- $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta + \theta')}$
- $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta - \theta')}$
- $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Application

- 1 Déterminer le module et un argument de $z_1 = -2i$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = -\sqrt{3} + i$, $z_4 = -3e^{i\frac{3\pi}{5}}$
- 2 Déterminer une forme exponentielle de z_1 , z_2 , z_3 , z_4 , $z_2^2 z_3$, $z_1 z_4$, $\frac{z_3}{z_2}$,
- 3 Montrer que z_3^{2019} est un imaginaire pur

4

Formule de Moivre

T

Théorème

Pour tout réel θ et pour tout entier naturel n , on a : $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$
 Elle s'écrit aussi $(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$

Application

Déterminer $\cos(2x)$ et $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$

5

Les deux formules d'Euler

T

Théorème

Pour tout réel θ

$$\blacksquare \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\blacksquare \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Application

Montrer que $\blacksquare \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$ et
 $\blacksquare \cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$ et que $\blacksquare \sin^3(x) = \frac{3 \sin(x) - \sin(3x)}{4}$

Application

- 1 Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $1 + e^{ix} = (e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}})e^{i\frac{x}{2}}$
- 2 En déduire une forme trigonométrique du complexe $z = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$
- 3 En déduire $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$

VIII**Les équations du seconde degrés à coefficient réels**

On appelle équation du seconde degré à coefficient réels toute équation de la forme $az^2 + bz + c = 0$
 ou $a \in \mathbb{R}^*$, $(b, c) \in \mathbb{R}^2$

1 Résolution de l'équation $z^2 = \delta$

Proposition

Soit δ un réel

- si $\delta \geq 0$ alors $z^2 = \delta \iff z = \pm\sqrt{\delta}$
- si $\delta < 0$ alors $z^2 = \delta \iff z = \pm i\sqrt{|\delta|}$

Exemple

- $z^2 = -4 \iff z = 2i$ ou $z = -2i$
- $z^2 = -3 \iff z = i\sqrt{3}$ ou $z = -i\sqrt{3}$

2 Résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ ou a, b et c sont des réelsPosons $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\text{On a } az^2 + bz + c = 0 \iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

on conclut que :

T

Théorème

- Si $\Delta = 0$ l'équation admet une unique solution dans $\mathbb{R} : z_0 = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$ l'équation admet deux solutions dans $\mathbb{R} : z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ l'équation admet deux solutions conjugués $\mathbb{C} : z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Remarque

- toute expression $Q(z) = az^2 + bz + c$ se factorise dans $\mathbb{C}$ et $Q(z) = az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$
- $Q(z) = az^2 + bz + c = a\left(z - \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a(z - Sz + P)$
 $S = z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$ et $P = z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{C} : z - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$

Application

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équation suivantes

- $2z^2 + z + 3 = 0$
- $2z^2 + 6z + 5 = 0$
- $z^2 + z + 2 = 0$

- $z^2 - 6z + 13 = 0$
- $(z + i)^2 + (z + i) + 2 = 0$
- $((-iz + 3 + 3i)^2 - 2(-iz + 3 + 3i) + 2 = 0$

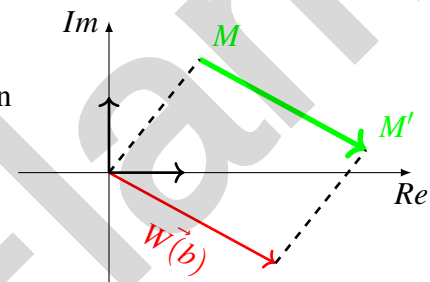
IX Écritures complexes de transformations

1 Écriture complexe d'une translation

soit t la translation de vecteur $\vec{W}$ d'affixe b et $M(z)$ un point du plan complexe

$M'(z')$ l'image de $M(z)$ par la translation t .

Donc : $\vec{MM'} = \vec{W} \iff z' - z = b$



T Théorème

$\vec{W}$ un vecteur d'affixe b On a équivalence :

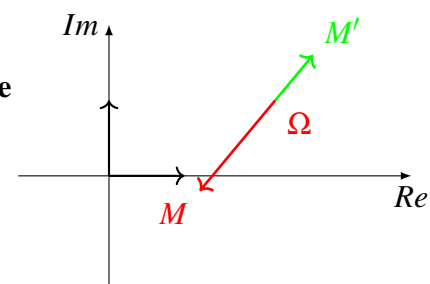
- 1 t la translation de vecteur $\vec{W}$ d'affixe b
- 2 l'écriture complexe de t est $z' = z + a$

2 Écriture complexe d'une homothétie

soit Ω un point d'affixe ω et k un réel non nul h l'homothétie de centre Ω de rapport k

$M'(z')$ l'image de $M(z)$ par l'homothétie h .

Donc : $\vec{\Omega M'} = k\vec{\Omega M} \iff z' - \omega = k(z - \omega)$



T Théorème

Ω un point d'affixe ω et k un réel non nul On a équivalence :

- 1 h l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ de rapport k
- 2 l'écriture complexe de h est $z' - \omega = k(z - \omega)$

Remarque

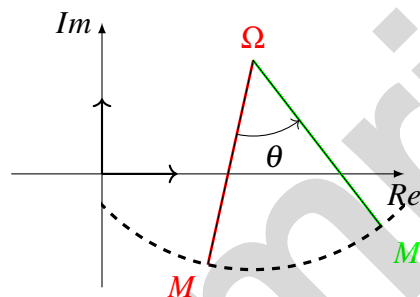
- $h(\Omega) = \Omega$. Ω est l'unique point invariant par $h_{(\Omega,k)}$ ($k \neq 1$)
- si $k = -1$ alors h est la symétrie centrale de centre Ω

3 Écriture complexe d'une rotation

soit Ω un point d'affixe ω et θ un réel. r la rotation de centre Ω et d'angle θ

$M'(z')$ l'image de $M(z)$ par la rotation r .

$$\begin{aligned} \text{Donc : } r(M) = M' &\iff \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta[2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \frac{|z' - \omega|}{|z - \omega|} = 1 \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta[2\pi] \end{cases} \\ &\iff \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta} \\ &\iff z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega) \end{aligned}$$



T

Théorème

Ω un point d'affixe ω et θ un réel. On a équivalence :

- 1 r est la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ
- 2 l'écriture complexe de r est $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

Remarque

- si $\theta = 0$ alors $r(M) = M$ pour tout point M du plan
- si $\theta = \pi$ alors $r = s_{\Omega}$
- $r(\Omega) = \Omega$. Ω est l'unique point invariant par $r_{(\Omega, \theta)}$ ($\theta \neq 0$)

Application

- 1 Déterminer l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$
- 2 Déterminer l'écriture complexe de la translation qui transforme $A(2 - 3i)$ en $B(4 + 5i)$