Cours 1BSM

Chapitre

Les suites numériques

Les orientations pédagogiques	Capacités attendues
• On pourra approcher la notion de suite récurrente à travers des situations issues des différentes disciplines ; • La leçon des suites numériques constituera pour les élèves une occasion pour utiliser l'outil informatique ; • On saisira cette occasion pour utiliser le raisonnement par récurrence ; • On traitera les suites récurrentes sans excès ;	• Utiliser le raisonnement par récurrence ; • Étudier une suite numérique (majoration, minoration, monotonie) • Reconnaitre une suite arithmétiques ou géométrique • Calculer la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétiques ou géométrique ; • Reconnaitre une situation de suite arithmétique ou géométrique ; • Utiliser une suite arithmétique que ou géométrique pour résoudre des problèmes
Les prés-requis	Les extensions
.	• Limite dune suite numérique. • Suite convergente ; • Suite divergente ; • Critères de convergence ; • Convergence dune suite croissante et majorée ; • Convergence dune suite décroissante et minorée ;

Chapitre Les suites numériques

I Suite numérique

1 Définition

Définition

On appelle suite numérique toute application de $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$.

Remarque

Si u est une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$.
- L'image de l'entier n par u se note u_n et s'appelle le terme pour l'entier n
- L'entier n s'appelle l'indice du terme u_n
- La suite numérique u se note : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$

2 Définir une suite

Une suite numérique peut être définie de deux manières différentes :

a De façon explicite

Définition

Une suite (u_n) est définie de façon explicite si le terme général u_n sexprime en fonction de n : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(n)$

Exemple

$u_n = 3n+2;\quad u_n = \frac{n^2+1}{2n+1};\quad v_n = \sqrt{n^2+1};\quad w_n = \frac{\sin(n)}{n+1}$

b Par une expression récurrente

Définition

Lorsque le terme général un dépend du ou des terme(s) précédent(s), on définit alors la suite par une relation de récurrence et par un ou plusieurs premier(s) terme(s).
La suite est dite récurrente à un terme si u_n ne dépend que du terme précédent.

$$u_0 \qquad et \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

La suite est dite récurrente à deux termes si un dépend des deux termes qui le précèdent.

$$u_0 \quad , \quad u_1 \qquad et \qquad u_{n+1} = f(u_n, u_{n+1})$$

Exemple

- Suites récurrente du premier ordre

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{v_n+3}{2v_n+1} \end{cases} \quad \begin{cases} w_0 = -4 \\ w_{n+1} = \sqrt{2w_n^2 + 3} \end{cases}$$

- Suites numériques du second ordre.

$$\begin{cases} u_0 = 2; u_1 = -1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = -2, v_1 = \frac{-1}{2} \\ u_{n+2} = \frac{u_{n+1}}{u_n+2} \end{cases}$$

Remarque

Il faut bien écrire les indices : u_{n+1} n'est pas $u_n + 1$

3 Suite majorée, suite minorée, suite bornée

Activité

Soit la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$

1. Calculer les 3 premiers termes.
2. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,(u_n \geq 0)$
3. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,(u_n \leq 2)$

Définition

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique. ($I \subset \mathbb{N}$)
⋆ On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est majorée s'il existe un réel M tel que :($\forall n \in \mathbb{I})\,(u_n \leq M)$
⋆ On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est minorée s'il existe un réel m tel que : $(\forall n \in \mathbb{I})\,(u_n \geq m)$
⋆ On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est bornée si elle est majorée et minorée.

Propriété

Une suite $(u_n)_{n\in I}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel positif α tel que $(\forall n \in I)\,(|u_n| \leq \alpha)$

4 Monotonie d'une suite

Activité

Soit la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} \geq u_n$

Définition

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique. $(\mathbb{I} \subset \mathbb{N})$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si : $\left(\forall (n,p) \in \mathbb{I}^2\right)(n \geq p \Rightarrow u_n \geq u_p)$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si : $\left(\forall (n,p) \in \mathbb{I}^2\right)(n \geq p \Rightarrow u_n \leq u_p)$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante sur I.

T Théorème

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique. $(\mathrm{I} \subset \mathbb{N})$
- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si et seulement si : $(\forall n \in \mathbb{I})\,(u_{n+1} \geq u_n)$ (P)
- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si et seulement si : $(\forall n \in \mathbb{I})\,(u_{n+1} \leq u_n)$

Exemples

• On suppose que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante donc $\left(\forall (n,p) \in \mathbb{I}^2\right)(n \geq p \Rightarrow u_n \geq u_p)$ d'où (et puisque $n+1 \geq n$) alors : $u_{n+1} \geq u_n$
• On suppose que la suite $(u_n)_{n\in I}$ vérifie la propriété (P). Soit n et p deux entiers tels que $n \geq p$ on a : $u_p \leq u_{p+1} \leq \cdots \leq u_{n-1} \leq u_n$ donc la suite : $(u_n)_{n\in \mathrm{I}}$ est croissante.

Application

Soit la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{7u_n-1}{2u_n+3} \end{cases}$ Montrer que $(u_n)_n$ est minorée par 1 et majorée par 3.

II Suite arithmétique, Suite géométrique

1 Suite arithmétique

a Définition

Activité

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})\left(u_n = \frac{3n+1}{2}\right)$ Soit n un entier naturel, calculer : $u_{n+1} - u_n$

Définition

On appelle suite arithmétique toute suite $(u_n)_{n\in I}$ définie par son premier terme et par la relation récurrente : $(\forall n \in \mathbb{I}) \quad u_{n+1} = u_n + r$ où r est un réel fixe.
Le réel r s'appelle la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathrm{I}}$.

Exemple

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$ la suite $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $r = -3$ et de premier terme $u_0 = 2$ Le premier terme et la raison d'une suite arithmétique s'appellent aussi les éléments de la suite arithmétique.

b Terme général d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite arithmétique de raison r et u_p l'un de ses termes. Soit n un entier naturel on a :

$$u_{p+1} = u_p + r$$
$$u_{p+2} = u_{p+1} + r$$
$$\vdots$$
$$u_n = u_{n-1} + r$$
$$u_n = u_p + \underbrace{r + r + \cdots + r}_{(n-p) \text{ termes}}$$

En faisant la somme membre à membre on obtient : D'où : $u_n = u_p + (n-p)r$

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite arithmétique de raison r et u_p l'un de ses termes, on a : $(\forall n \in \mathbb{I})$: $u_n = u_p + (n-p)r$

Application

(1) Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que $u_{15} = 375$ et $u_{20} = 520$

1 Déterminer sa raison r

2 Déterminer son premier terme u_0

(2) Soit $(w_n)_n$ tel que : $\begin{cases} w_6+w_9+w_{13}=192 \\ w_4+w_{15}=130 \end{cases}$ Déterminer son terme w_{30}

Remarque

Si u_0 est le premier terme d'une suite arithmétique de raison r alors : $(\forall n \in \mathbb{N})\,(u_n = u_0 + nr)$
Si u_1 est le premier terme d'une suite arithmétique de raison r alors : $(\forall n \in \mathbb{N})\,(u_n = u_1 + (n-1)r)$

c La somme des termes successifs d'une suite arithmétique

Propriété

Soient $(u_n)_n$ une suite arithmétique, p un entier naturel et $S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$
On a : $S = \frac{(n-p+1)}{2}\left[u_p + u_n\right]$

Exemples

Soient $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison, p un entier naturel et $S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$ On a : d'après le terme général d'une suite arithmétique : $(\forall n \in \mathbb{I})\,(u_n = u_p + (n-p)r)$ D'où :

$$u_p = u_p$$

$$u_{p+1} = u_p + r$$
$$u_{p+2} = u_p + 2r$$
$$u_n = u_p + (n-p)r$$

En faisant la somme membre $S = \underbrace{(u_p + u_p + \cdots + u_p)}_{(n-p+1)\text{ termes}} + r(1+2+\cdots+(n-p))$

D'où :

$$\begin{aligned} S &= (n-p+1)u_p + r \times \frac{(n-p)(n-p+1)}{2} \\ &= \frac{(n-p+1)}{2}\left[2u_p + (n-p)r\right] \\ &= \frac{(n-p+1)}{2}\left[u_p + (u_p + (n-p)r)\right] \end{aligned}$$

En remarquant que : $u_n = u_p + (n-p)r$ Finalement : $S = \frac{(n-p+1)}{2}\left[u_p + u_n\right]$

d Trois termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soient a, b et c trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r on a donc : $\begin{cases} b = a + r \\ c = b + r \end{cases}$
En faisant la différence membre à membre on obtient : $b - a = c - b$ par suite : $2b = a + c$ Inversement : si a, b et c sont trois réels tels que $2b = a + c$ alors $b - a = c - b$ et par suite, a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $r = b - a$

Propriété

a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si $2b = a + c$

Application

Déterminer le réel x pour que les nombres $(3x - 1); (1 - 4x)$ et $(x - 5)$ soient les termes consécutifs d'une suite arithmétique pour laquelle il faut déterminer la raison.

2 Suite géométrique

a Définition

Définition

On appelle suite géométrique toute suite $(v_n)_{n \in I}$ définie par son premier terme et par la relation récurrente : $(\forall n \in \mathbb{I}) \quad v_{n+1} = q v_n \quad$ où q est un réel fixe.
Le réel q s'appelle la raison de la suite $(v_n)_{n \in I}$

Exemple

$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{2} \end{cases}$ la suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 2$
Le premier terme et la raison d'une suite géométrique s'appellent aussi les éléments de la suite géométrique.

b Terme général d'une suite géométrique

Soit $(v_n)_{n \in I}$ une suite géométrique de raison q ; et p un entier naturel on a :

$$\begin{gathered} v_{p+1} = q \times v_p \\ v_{p+2} = q \times v_{p+1} \\ \vdots \\ v_n = q \times v_{n-1} \\ v_n = q \times q \times \ldots \times v_p \text{(n-p) f o i s} \\ \text{d'où } v_n = q^{n-p} \times v_p \end{gathered}$$

En faisant les produits membre à membre on obtient :

Propriété

Si $(v_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique de raison q et si p est un entier naturel alors :
$(\forall n \in \mathbb{I}) \quad v_n = q^{n-p} \times v_p$

Cas particuliers :

⋆ La suite commence à u_0.
Pour obtenir le terme suivant, en fonction du précédent, on multiplie par q.
Pour obtenir u_n on a multiplié n fois par q à partir de u_0. On a donc : $\quad (\forall n \in \mathbb{I}) \quad v_n = q^n \times v_0$
⋆ La suite commence à u_p.
De u_p à u_n on a multiplié $n-p$ fois par q, donc $(\forall n \in \mathbb{I})\,(v_n = q^{n-p} \times v_p)$

c La somme des termes consécutifs d'une suite géometrique

Soient $(v_n)_{n\in \mathbb{K}}$ une suite géométrique de raison q, et v_p I'un de ses termes. soit $S = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n$
Si $q = 1$ tous les v_i sont égaux et $S = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n = \underbrace{v_p + v_p + \cdots + v_p}_{(n-p+1) \text{ termes}} = (n-p+1)v_p$

Si $q \neq 1$ On a : $S = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n$
Donc :

$$\begin{aligned} qS &= qv_p + qv_{p+1} + \cdots + qv_n \\ &= v_{p+1} + v_{p+2} + \cdots + v_{n+1} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} S - qS &= \left(v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n\right) - \left(v_{p+n} + v_{p+2} + \cdots + v_{n+1}\right) \\ &= v_p - v_{n+1} \\ &= v_p - q^{n-p+1} v_p \\ &= v_p\left(1 - q^{n-p+1}\right) \end{aligned}$$

Donc : $S(1-q) = v_p\left(1 - q^{n-p+1}\right)$
Finalement : $S = v_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Propriété

Soient $(v_n)_{n\in \mathbb{I}}$ une suite géométrique de raison q, et v_p I'un de ses termes. soit $S = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n$
- Si $q = 1$ alors : $S = (n-p+1)v_p$
- Si $q \neq 1$ alors : $S = v_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Propriété

a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si $b^2 = a \times c$

Exemples

En exercice

Application

Déterminer le réel x pour que les nombres : $(1+x^2);(3+x)$ et 10 soient les termes consécutifs d'une suite géométrique dans cet ordre et déterminer sa raison.