Chapitre Les polynômes

I Notion de polynôme

Activité

soit x un réel tel que $x>1$ on considère $x-1$ et $x+1$ et $x+3$ les trois dimensions d'un parallélépipède et soit $P(x)$ son volume.

- Calculer $P(x)$.

Commentaires :

L'expression x^3+3x^2-x-3 s'appelle **un polynôme** de degré 3 .

Les expressions x^3, $3x^2$, $-x$ et -3 sont **les monômes** du polynôme x^3+3x^2-x-3.

Les réels:1,3,-1 et -3 sont respectivement **les coefficients** des monômes de degré:3 ,2,1,et le monôme de degré nul.

Définition

On appelle polynôme à coefficients réels de degré n toute expression $P(x)$ qui peut s'écrire sous la forme :$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+......+a_1x+a_0$;où $a_0,a_1,....,a_n$ sont des réels avec $a_n\neq 0$

Le terme a_nx^n s'appelle monôme de degré n. On note $deg(P)=n$

Exemple

$P(x)=2x^3-4x+5$ donc $deg(P)=3$.

$P(x)=2x^3-4\sqrt{x}+5$ n'est pas un polynôme.

Remarque

Tout polynôme P de la forme $P(x)=ax^2+bx+c$ où a,b et c sont des réels avec $a\neq 0$ s'appelle trinôme .

Tout polynôme P de la forme $P(x)=ax+b$ où a,b sont des réels avec $a\neq 0$ s'appelle binôme.

Le polynôme nul n'a pas de degré.

II Egalité de deux polynômes

Définition

Deux polynômes P et Q sont égaux si et seulement si $deg(P) = deg(Q)$ et les coefficients respectifs des monômes de même degré de P et Q sont égaux.

Exemple

Les deux polynômes P et Q sont-ils égaux dans les cas suivants :

1. $P(x) = 2x^3 - 4x + 5$ et $Q(x) = x + 2x^3 - 5x + 5$.
2. $P(x) = x^3 - 4x + 1$ et $Q(x) = x^3 + 4x + 1$
3. $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2}+1}x^3 + 2x + 5$ et $Q(x) = (\sqrt{2} - 1)x^3 + 2x + 5$

III Opérations sur les polynômes

Activité

On considère $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes tels que : $P(x) = 4x^2 - 3x + 1$ et $Q(x) = -3x^3 + x$

1) Calculer $P(x) + Q(x)$ et $P(x) - Q(x)$.
2) Calculer $P(x) \times Q(x)$, puis comparer $d°(P(x) \times Q(x))$ et $d°(P(x)) + d°(Q(x))$.

Propriété

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes non nuls. On a :

1) $d°(P \times Q) = d°P + d°Q$
2) $d°(P + Q) \leq \max(d°P, d°Q)$

Application

Déterminer le degré du polynôme $Q(x)$ puis déterminer sa forme sachant que :
$x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x = (x^2 + 1)Q(x)$

IV Racine d'un polynôme - divisibilité par $x-a$

1 Racine d'un polynôme

Définition

Soient $P(x)$ un polynôme et a un nombre réel. On dit que le nombre a est une racine ou un zéro de $P(x)$ si $P(a)=0$.

Exemple

$P(x)=2x^2-3x+1$

On a $P(1)=0$ alors 1 est une racine du polynôme $P(x)$.

On a $P(2)=3\neq 0$ donc 2 n'est pas une racine du polynôme $P(x)$.

2 Divisibilité par $x-a$

Propriété

Soit P un polynôme à coefficients réels.
a est une racine de P si et seulement s'il existe un polynôme Q tel que :
pour tout réel x, $P(x)=(x-a)Q(x)$.

Exemple

Considérons le polynôme P tel que : $P(x)=x^3-3x^2+x+1$. On a : $P(1)=0$ donc 1 est une racine de $P(x)$ d'où $P(x)$ est divisible par $x-1$. Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x-1$, on trouve : $P(x)=(x-1)(x^2-2x-1)$ avec $Q(x)=x^2-2x-1$ s'appelle le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-1$.

Application

On considère $P(x)$ un polynôme tel que : $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$.

1. Montrer que $P(x)$ est divisible par $x-1$.
2. Déterminer par deux méthodes différentes le polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x)=(x-1)Q(x)$.
3. Montrer que 3 est une racine de $Q(x)$.
4. Factoriser $Q(x)$.
5. En déduire une factorisation de $P(x)$.
6. Résoudre l'équation $P(x)=0$.