Chapitre

Les fonctions logarithmes

Les recommandations pédagogiques	Capacités attendues
▶ La fonction logarithme népérien est la fonction primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ définie sur l'intervalle et qui s'annule en 1 ; ▶ On admettra à ce niveau que : et , ces deux limites seront considérées comme des limites fondamentales ; on admettra aussi l'expression de la fonction dérivée de la fonction logarithme népérien.	▶ Maitriser les calculs sur les logarithmes népériens et décimaux ; ▶ Maitriser la résolution des équations et des inéquations logarithmiques simples ; ▶ Utiliser la calculatrice pour déterminer des valeurs approchées du logarithme d'un nombre réel strictement positif ou la valeur approchée d'un nombre connaissant son logarithme ; ▶ Maitriser les deux limites du logarithme népérien aux bornes de son domaine de définition ; ▶ Maitriser l'étude et la représentation des fonctions simples dont l'expression comporte la fonction logarithme népérien.

Les prés-requis	Les extensions
▶ Calcul numérique. ▶ Dérivabilité	▶ Fonction exponentielle néperienne.

Yassine Elamri

Historique

Vers la fin du XVI^e siècle, le développement de l'astronomie et de la navigation maritime d'une part et les calculs bancaires d'intérêts composés d'autre part, poussent les mathématiciens à chercher des méthodes de simplification de calculs et en particulier le remplacement des multiplications par des sommes.

Utilisant les tables trigonométriques, les mathématiciens Paul Wittich et Christophe Clavius (dans son traité de Astrolabio) établissent des correspondances entre produit ou quotient d'une part et somme, différence et division par deux d'autre part, pour des nombres de 0 à 1 à l'aide de relations trigonométriques, méthode dite de prostaphérèse.

Quelques années plus tard Simon Stévin, intendant général de l'armée hollandaise, met au point des tables de calculs d'intérêts composés. Jost Bürgi poursuit ce travail et publie en 1620, dans son Aritmetische und geometrische Progress-tabulen, une table de correspondance entre n et $1{,}0001^n$. À une somme dans la première colonne correspond ainsi un produit dans la seconde colonne.

En 1614, John Napier (ou Neper) publie son traité Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio. Il ne songe pas qu'il est en train de créer de nouvelles fonctions, mais seulement des tables de correspondance (logos = rapport, relation, arithmeticos = nombre) entre deux séries de valeurs telles qu'à un produit dans une colonne correspond une somme dans une autre. La notation Log comme abréviation de logarithme apparaît en 1616 dans une traduction anglaise de l'uvre de Neper. En 1619, paraît son uvre posthume Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio, où il explique comment construire une table de logarithmes.

Le mathématicien anglais Henry Briggs poursuit ce travail et publie en 1624 ses tables de logarithmes décimaux (Arithmetica logarithmica) à 14 chiffres des nombres compris entre 1 et 20 000 et entre 90 000 et 100 000. Il indique les méthodes d'emploi des tables pour calculer des sinus ou les angles à partir de leur tangente La même année, Johannes Kepler publie Chilias logarithmorum construites en utilisant un procédé géométrique. Ezechiel de Decker et Adriaan Vlacq complètent la table de Briggs en 1627.

En 1647, Grégoire de Saint-Vincent, travaillant sur la quadrature de lhyperbole, définit la fonction primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ s'annulant en 1. Huygens remarquera en 1661 que cette fonction se trouve être une fonction logarithme particulière : le logarithme naturel.

La correspondance entre les fonctions exponentielle et logarithme n'apparaît qu'après le travail de Leibniz sur la notion de fonction, en 1697.

Yassine Elamri

Yesterday better than today, tomorrow better than today

I La fonction logarithme népérien

1 Le symbole ln

Activité

Compléter le tableau suivant ou f' est la dérivée de f sur l'intervalle I :

$f(x)$	$f'(x)$	l'intervalle I
x^2	...	$\mathbb{R}$
$3x$	...	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	...	$]0;+\infty[$
...	5	$\mathbb{R}$

• La fonction $F : x \longmapsto 2x$ s'appelle la dérivée de la fonction $f : x \longmapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.
• La fonction $f : x \longmapsto x^2$ s'appelle une primitive de la fonction $F : x \longmapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.
• La fonction qui a pour dérivée la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ s'appelle la fonction logarithme népérien et se note ln.

D **Définition**

La fonction logarithme népérien est une fonction primitive de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ et qui s'annule en 1 ; on la note par ln.

Conséquences :

- ▶ La fonction $x \to \ln(x)$ est définie sur $]0,+\infty[$.
- ▶ $\ln(1) = 0$
- ▶ La dérivée de la fonction $\ln : x \longmapsto \ln(x)$ est la fonction : $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ et on a : $(\forall x > 0)\ (\ln(x))' = \frac{1}{x}$

2 Expressions $\ln xy$; $\ln \frac{x}{y}$; $\ln \sqrt{x}$; $\ln x^n$ $(n \in \mathbb{N})$

Propriété

Propriété caractéristique : $(\forall x \in]0;+\infty[; \forall y \in]0;+\infty[)\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

Exemple

Sachant que $\ln(2) \simeq 0,7$ et $\ln(3) \simeq 1,1$ calculer $\ln(6)$.

Yassine Elamri

Propriété

$(\forall x>0)\ \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\ln(x)$.

$(\forall x>0\ )\ (\ \forall y>0)\ ;\ \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)/$

• Preuve

1 $(\forall x>0)\ ;\ \ln\left(\dfrac{x}{x}\right)=\ln\left(x\times\dfrac{1}{x}\right)=\ln(x)+\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=0.$

Donc : $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\ln(x)$.

2 $(\forall x>0\ )\ (\ \forall y>0)\ ;\ \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)=\ln\left(x\times\dfrac{1}{y}\right)=\ln(x)+\ln\left(\dfrac{1}{y}\right).$

Donc $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$.

Exemple

Sachant que $\ln(2)\simeq 0,7$ et $\ln(3)\simeq 1,1$ calculer $\ln(\dfrac{1}{3})$ et $\ln(\dfrac{3}{2})$.

Propriété

$(\forall x>0)(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \ln(x^n)=n\ln(x)$.

Propriété

$(\forall x>0)\ ;\ \ln(\sqrt{x})=\dfrac{1}{2}\ln(x)$.

Exemple

Sachant que $\ln(2)\simeq 0,7$ calculer $\ln(8)$ et $\ln(\sqrt{3})$.

Application

1 Sachant que $\ln(5)\simeq 1,6$ et $\ln(2)\simeq 0,7$, calculer $A=\ln(\dfrac{\sqrt{5}}{4})$; $B=\ln(5^2\times 2)-\ln\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

2 Simplifier $E=\ln 7-\dfrac{3}{2}\ln 5+\ln 35+\ln(\sqrt{5})$.

Yassine Elamri

Yesterday better than today, tomorrow better than today

3 Étude et représentation de la fonction $x \longmapsto \ln x$

a Limites

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$.

b Monotonie et tableau de variation

• **Monotonie de la fonction logarithme népérien :**

Nous avons $(\forall x > 0\,)\ (\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$. Donc la fonction $x \to \ln(x)$ est croissante sur $]0,+\infty[$.

Conséquences :

$(\forall a > 0\,;\forall b > 0)$ si $a \le b$ alors $\ln(a) \le \ln(b)$.

• **Tableau de variation de la fonction logarithme :** népérien :

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln'(x)$	‖		$+$	
$\ln(x)$	‖ $-\infty$ ↗	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

Propriété

$(\forall a > 0\,;\forall b > 0)$ si $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$.

Application

1. Résoudre les équations :
   a) $\ln(x+2) = \ln(3)$.
   b) $2\ln(x) - 3 = 0$.
2. Résoudre les inéquations :
   a) $\ln(x-3) \le \ln(2)$.
   b) $\ln(x+1) \le \ln(x) + \ln(2)$.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\ln(x)$; $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x}\ln(x)$.

c Le nombre e

D Définition

e est le nombre réel qui vérifie $\ln e = 1$.

Remarques :

• e n'est pas un nombre rationnel.

• $e \simeq 2,718...$ et $\dfrac{1}{e} \simeq 0,36...$.

Yassine Elamri

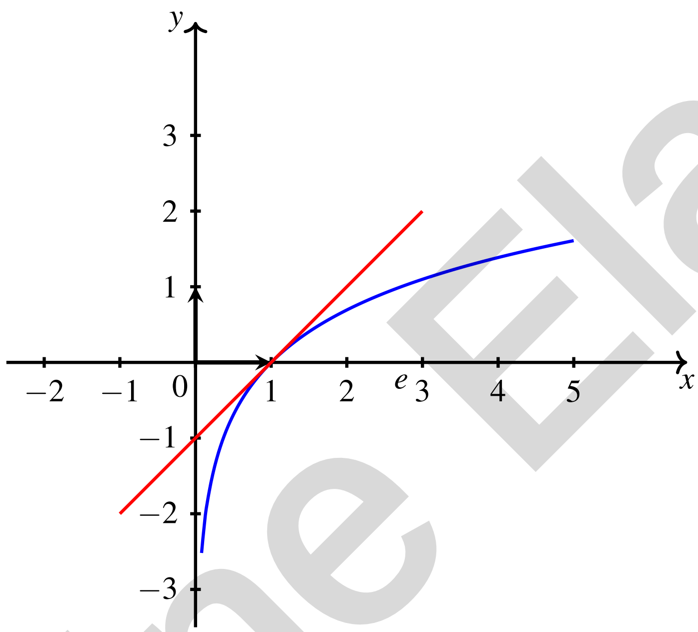
Yesterday better than today, tomorrow better than today

Propriété

- $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \ln(e^n) = n$.
- $\ln(\frac{1}{e}) = -1$ et $\ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$.

d La représentation graphique de la fonction ln

La courbe de la fonction ln est représentée par la figure suivante :



Remarques :
• L'équation cartésienne de la tangente à la courbe de ln au point $A(1;0)$ est : $y = (\ln)'(1)(x-1) + \ln 1$, c'est à dire $y = x - 1$.
• La courbe de la fonction ln est au dessous de l'axe des abscisses dans l'intervalle $]0;1]$, d'où $\forall x \in]0;1]$ $\ln x \leq 0$.
• La courbe de la fonction ln est au dessus de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[1;+\infty[$, d'où $\forall x \in [1;+\infty[$ $\ln x \geq 0$.

II Logarithme décimal

1 Définition

D **Définition**

La fonction logarithme décimal est la fonction, notée log, définie sur $]0;+\infty[$ par

$$\forall x \in]0;+\infty[\ \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} .$$

Yesterday better than today, tomorrow better than today

1.Chapter 1 Les fonctions logarithmes

Yassine Elamri

Cas particuliers :

- $\log(e) = \dfrac{\ln(e)}{\ln(10)} = \dfrac{1}{\ln(10)}$.
- $\log(1) = \dfrac{\ln(1)}{\ln(10)} = 0$,
- $\log(10) = \dfrac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1$.

2 Propriétés

Propriété

1. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$.
2. Pour tous réels $a > 0$ $\log(\dfrac{1}{a}) = -\log(a)$.
3. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\log(\dfrac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$.
4. $\forall a \in]0;+\infty[\quad \forall n \in \mathbb{Z}$, $\log(a^n) = n\log(a)$.
5. $(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad \log(10^n) = n\log(10) = n$.
6. $\log\sqrt{10} = \dfrac{1}{2}$.
7. $(\forall n \in \mathbb{Z})$ $(\forall x \in]0;+\infty[\,)$ $n = \log a$ équivaut à $a = 10^n$.
8. $\forall x \in]0;+\infty[$ $(\log)'(x) = \dfrac{1}{x\log 10}$.
9. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\log(a) = \log(b) \Leftrightarrow a = b$.
10. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\log(a) \leq \log(b) \Leftrightarrow a \leq b$.
11. Si $10^n \leq a < 10^{n+1}$ alors $n \leq \log(a) < n+1$.

Exemple

$\log 1000 = \log(10^3) = 3\log(10) = 3$.
$\log 0,01 = \log(10^{-2}) = -2\log(10) = -2$.

3 Le tableau de variation de la fonction log

x	0		1		10		$+\infty$
$\log'(x)$	$\|\|$			$+$			
$\log(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

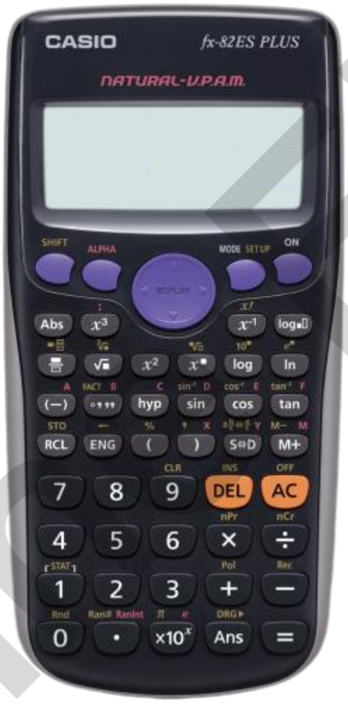
Yesterday better than today, tomorrow better than today

Yassine Elamri

Application

1. Sachant que $\log(3) \simeq 0,4$, calculer $\log(30)$; $\log\sqrt{900}$; $\log(0,3)$.
2. Simplifier $A = \log(10) + 2\log(100) + \log(10^4)$; $B = \log(4) + \log(25)$.
3. Donner un encadrement de $\log(104,3)$ par des entiers naturels successifs .
4. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\log(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\log(x)$; $\lim\limits_{x\to0^+} -3\log(x)$.
5. Calculer la dérivée de la fonction f définie par : $\forall x \in]0;+\infty[\ \ f(x) = x\log(x)$.

III Annexe : Logarithme et utilisation d'une calculatrice



Utiliser une calculatrice pour :

1. Calculer $\ln 4$.
2. Calculer $\log 7$.
3. Determiner une valeur approchée de x tel que $\log x = 3,5$.

Yassine Elamri