# Fonctions exponentielles

Chapitre

Cours 2BSM

## I Fonctions exponentielles népérienne

### 1 Définition et propriétés

**Activité**

On considère la fonction numérique $f$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln x$.

1. Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que : $(\forall a,b\in\mathbb{R}) : f^{-1}(a+b)=f^{-1}(a)\times f^{-1}(b)$.
3. Vérifier que $f^{-1}(0)=1$
4. En déduire que $\forall x\in\mathbb{R}\,;\, f^{-1}(x)>0$

D **Définition**

On appelle fonction exponentielle népérienne, notée *exp* la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien ln sur $]0,+\infty[$

**Propriété**

- $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\,\ln(\exp(x))=x$
- $(\forall x\in\,]0,+\infty[)\,;\,\exp(\ln(x))=x$
- $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in]0;+\infty[)\,;\,\exp(x)=y\Leftrightarrow x=\ln(y)$
- $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\,\exp(x)>0$
- $\exp(0)=1$
- $\exp(1)=e$

**Remarque**

Les fonctions ln et *exp* sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.

**Propriété**

La fonction exp est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et on a :

- $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in]0;+\infty[)\,;\,\exp(x)=\exp(y)\Leftrightarrow x=y$
- $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in]0;+\infty[)\,;\,\exp(x)\leq\exp(y)\Leftrightarrow x\leq y$

## 2 Écriture $e^x$

**Propriété**

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall r \in \mathbb{Q}); \exp(rx) = \exp(x)^r$$

### • Preuve

$$\begin{aligned}(\forall x \in \mathbb{R})(\forall r \in \mathbb{Q}); \ln\left(\exp(x)^r\right) &= r\ln(\exp(x))\\ &= rx\\ &= \ln(\exp(rx))\end{aligned}$$

D'où $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall r \in \mathbb{Q})\,;\, \exp(rx) = \exp(x)^r$

**Résultat**

- $(\forall r \in \mathbb{Q})\exp(r) = (\exp(1))^r = e^r$
- On peut prolonger la propriété précédente à $\mathbb{R}$ : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall r \in \mathbb{Q})\,;\, (\exp(x) = (\exp(1))^x = e^x$

**Propriété**

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

1. $e^{x+y} = e^x \times e^y$
2. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
3. $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^-y}$
4. $e^{rx} = (e^x)^r\,;\,(r \in \mathbb{Q})$
5. $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, \ln(e^x) = x$
6. $(\forall x \in ]0;+\infty[); e^{\ln x} = x$
7. $(\forall x \in \mathbb{R})((\forall y \in ]0;+\infty[)\,;\, e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$
8. $(\,\forall x \in \mathbb{R}); e^x > 0$
9. $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
10. $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$

**Application**

1. Simplifier les expressions suivantes :
   - $A = e^{2+\ln 8}$
   - $B = \frac{e^2}{e^{1+\ln 2}}$
   - $C = \frac{e^{4x}}{(e^x)^2 \times e}$
   - $D = (e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})$

2 Montrer que :

- $\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}}$
- $e^x - \frac{e^x}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+e^{-x}}$

**Application**

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $(E_1) : e^{x+3} = e^4$
- $(E_2) : e^{2x} - e^x - 2 = 0$
- $(E_3) : e^{-x} + e^x = 1$
- $(E_4) : \frac{e^{2x}-e^x}{e^x+1} = \frac{e^x-1}{e^{-x}+1}$
- $(E_5) : \frac{e^x}{e^x-11} - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{2}{e^{-x}+e^x}$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $e^{2x} - e^x \geq 2$

## 3 Limites usuelles

**Propriété**

1- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

2- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

3- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = 0 ; (n \in \mathbb{N}^*)$

7- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

4- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

5- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

6- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 ; (n \in \mathbb{N}^*)$

### • Preuve

1- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x > x$

2- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x \geq \frac{x^2}{2}$

3- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left( \frac{1}{n} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} \right)^n = +\infty$

4- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{e^t} = 0$

5- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{\frac{e^{-x}}{-x}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{-1}{\frac{e^t}{t}} = 0$

6- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = \left( n.\frac{x}{n} e^{\frac{x}{n}} \right)^n = 0$ 7- Le dérivabilité de exp en 0

**Application**

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} (2e^x - 3x)$

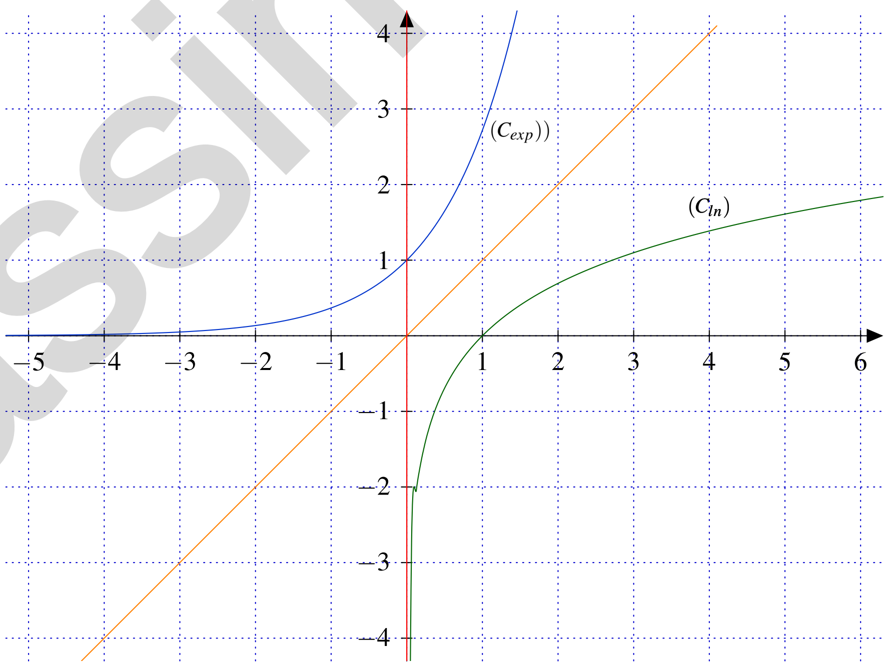
2. $\lim_{x\to -\infty} (2e^x - 3x)$
3. $\lim_{x\to +\infty} x^3 e^{-x}$
4. $\lim_{x\to -\infty} \left(x^2 - 2x + 1\right) e^x$
5. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2e^x - 3}{2e^x + 2}$
6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{x}$
7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - -2x - 1}{x^2}$

## 4 Courbe représentative de la fonction exponentielle

On a vu que la fonction exponentielle népérienne et la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien, donc la courbe de la fonction exp notée $\left(C_{\exp}\right)$ et la courbe de la fonction In notée $\left(C_{\ln}\right)$ sont symétriques par rapport à la droite $(D)$ d'équation $y = x$, bien entendu, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| exp | $0$ ↗ | $1$ ↗ | $e$ ↗ | $+\infty$ |

La figure ci-dessous donne les représentations graphiques des deux fonctions :



# II Dérivée de la fonction exponentielle

**Activité**

Soit $f$ une fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\ln(x)$, et $f^{-1}$ sa fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$ par : $f^{-1}(x)=e^x$

1. Montrer que $f^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
2. Calculer $f^{-1}(x)$ ;pour tout $x\in\mathbb{R}$
3. Soit $u$ une fonction définie sur l'intervalle$I$
   a. Montrer que la fonction $h: x\to e^{u(x)}$ est dérivable sur $I$
   b. Calculer $h'(x)$ ; pour tout $x\in I$

**Propriété**

La fonction $x\mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $(\forall x\in\mathbb{R}) : (e^x)'=e^x$

**COROLAIRE**

Soit $u$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$. Alors : $x\mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur $I$ et $(\forall x\in\mathbb{R})$ : $\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x)e^{u(x)}$

**Exemple**

La fonction $f$ définie par $f(x)=(e^x-3)(e^x+2)$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme étant produit de fonctions dérivables), et on a pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned}(\forall x\in\mathbb{R}); f'(x) &= [(e^x-3)(e^x+2)]' \\ &= (e^x-3)'(e^x+2)+(e^x-3)(e^x+2)' \\ &= e^x(e^x+2)+e^x(e^x-3) \\ &= e^{2x}+2e^x+e^{2x}-3e^x \\ &= 2e^{2x}-e^x\end{aligned}$$

## Remarque

Soit $u$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$. Les primitives sur $I$ de la fonction $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions $x\mapsto e^{u(x)}+k$ où $k\in\mathbb{R}$.

**Exemple**

Déterminons les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :
1. $x\mapsto e^{-5x}$
2. $x\mapsto xe^{x^2}$

**Application**

Soient $g_n$ une fonction définie sur $[0,+\infty$ par : $\begin{cases} g_n(x) = xe^{-\frac{1}{nx}} & x \neq 0 \\ g_n(0) = 0 \end{cases}$, et $(C_{g_n})$ sa courbe représentatif dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

1. a. Montre que $g_n$ est continue à droite de 0
   b. Étudier la dérivabilité de $g_n$ à droite de 0
2. a. Calculer : $\lim_{x\to+\infty} g_n(x)$
   b. Calculer $g_n'(x)$ pour tot $x \in \mathbb{R}^+$, puis dresser le tableau de variations de $g_n$
3. On pose $h(t) = e^{-t} - (1-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$
   a. Étudier les variations de $h$
   b. En déduire que : $(\forall t \in [0,+\infty[) \quad 0 \leq 1 - e^{-t} \leq t$
   c. Montrer que : $(\forall x \geq 0)\ 0 \leq e^{-x} - (1-x) \leq \frac{x^2}{2}$
4. a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (\forall x > 0)\ 0 \leq g_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2x}$
   b. Étudier la branche parabolique de $(C_{g_n})$ en $+\infty$
   c. Étudier la position relative de $(C_{g_n})$ et l'asymptote oblique
5. Tracer la courbe $(C_{g_1})$ dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

# III Exponentielle de base $a$

## 1 Définition et résultats

**Théorème et Définition**

Soit $a$ un réel strictement positif.
La fonction $\log_a$ étant continue et strictement monotone sur $]0,+\infty[$ , elle admet donc une fonction réciproque de $\mathbb{R} = \log(]0,+\infty[)$ vers $]0,+\infty[$.
Cette fonction réciproque s'appelle fonction exponentielle de base $a$, se note $\exp_a$

**Résultats immédiats :**

Soit $> 0$ et $aa \neq 1$

- La fonction $\exp_a$ est définie sur $\mathbb{R}$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, \exp_a(x) > 0$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in ]0,+\infty[)\,;\, \exp_a(x) = y \Leftrightarrow x = \log_a(y)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, \log_a(\exp_a(x)) = x$
- $(\forall x \in ]0,+\infty[)\ \exp_a(\log_a(x)) = x$

## 2 Écriture $e^{x\ln(a)}$

**Propriété**

Soit $a>0$ et $a\neq 1$ ; on a : $(\forall x\in\mathbb{R})$ ; $\exp_a)(x)=e^{x\ln(a)}$

### • Preuve

Posons : $y=\exp(x)$ on a donc $y>0$ et $x=\log_a(y)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ D'où : $\ln(y)=x\ln(a)$ ; finalement $y=e^{x\ln(a)}$ d'où la propriété

**Propriété**

La fonction $x\rightarrow\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x\in\mathbb{R})$ on a : $(\exp(x))'=\ln(a)e^{x\ln(a)}$

## 3 Monotonie et représentation

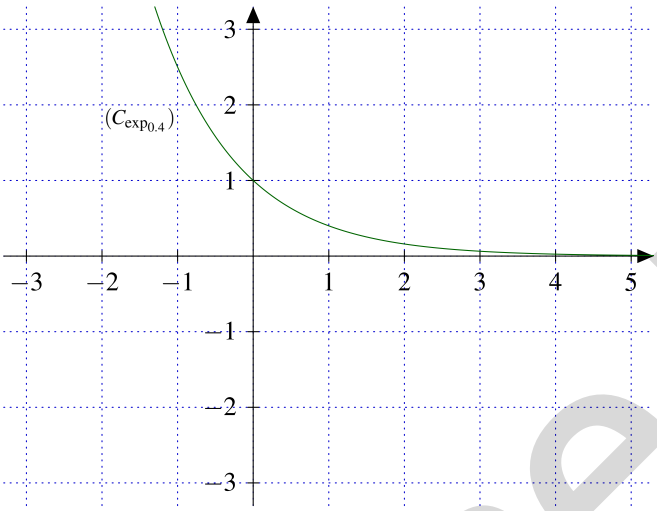
Soit $a$ un réel strictement positif et différents de 1
On considère la fonction $f_a$ définie sur $]0,+\infty[$ par : $f_a(x)=\exp_a(x)=e^{x\ln(a)}$
La fonction $f_a$est dérivable sur $\mathbb{R}$ Donc $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x)=\ln(a)e^{x\ln(a)}$
Donc le signe de $f'_a(x)$ est le signe de $\ln(a)$ car : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $e^{x\ln(a)}>0$

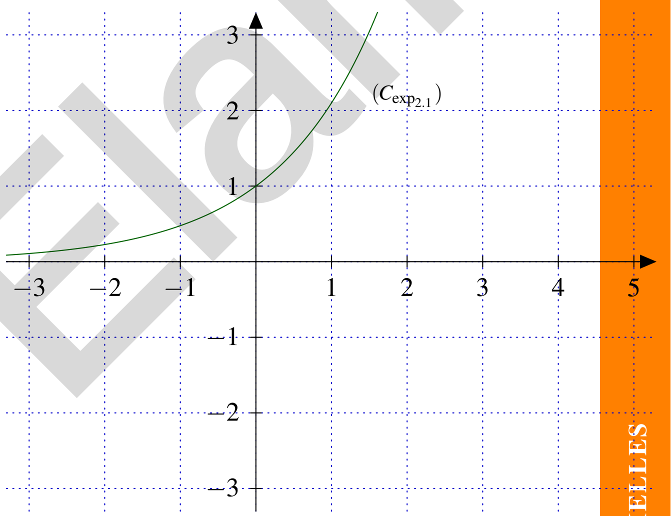
Si $a \in ]0,1[$ alors $\ln(a) < 0$
Donc $(\forall x \in \mathbb{R})$ ; $f'_a(x) < 0$,
Alors $f_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\ln(x)$ | $+\infty$ ↘ | $1$ | ↘ $-\infty$ |

Si $a \in ]1,+\infty$ alors $\ln(a) > 0$
Donc $(\forall x \in \mathbb{R})$ ; $f'(x) > 0$,
Alors $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\ln(x)$ | $-\infty$ ↗ | $1$ | ↗ $+\infty$ |




**Propriété**

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$ ; on a :

- $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)$ ; $\exp_a(x+y) = \exp_a(x) \times \exp_a(y)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})$ ; $\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)}$
- $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)$ ; $\exp_a(x-y) = \frac{x}{\exp_a(y)}$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall r \in \mathbb{Q})$ ; $(\exp_a(x))^r = \exp_a(rx)$

**• Preuve**

utiliser l'écriture $e^{x\ln(a)}$

## 4 Les puissances réelles

### a Rappelle

- Puissance entier

Soit $x$ un réel et $n$ un entier naturel non nul on a :
$x^n = \underbrace{x \times x \times .... \times x}_{n \text{ fois}}$ et $x^0 = 1$ si $x \neq 0$

- Puissance relatif

  $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\, x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

- Puissance rationnelle

  $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall r \in \mathbb{Q}^*)\,;\, r = \frac{p}{q}\ \sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}$

## b puissances réelles : Notation $a^x$

Soit $a$ un réel strictement positif.

- Si $a = 1$ , on pose pour tout réel $x > 0$ : $a^x = 1$
- Si $a \neq 1$ , on pose $a^x = e^{x\ln(a)}$

2023/2024
Pr : .....

# Série 07
## Fonction exponentielle

Classe :
Lycée : ..........