Chapitre

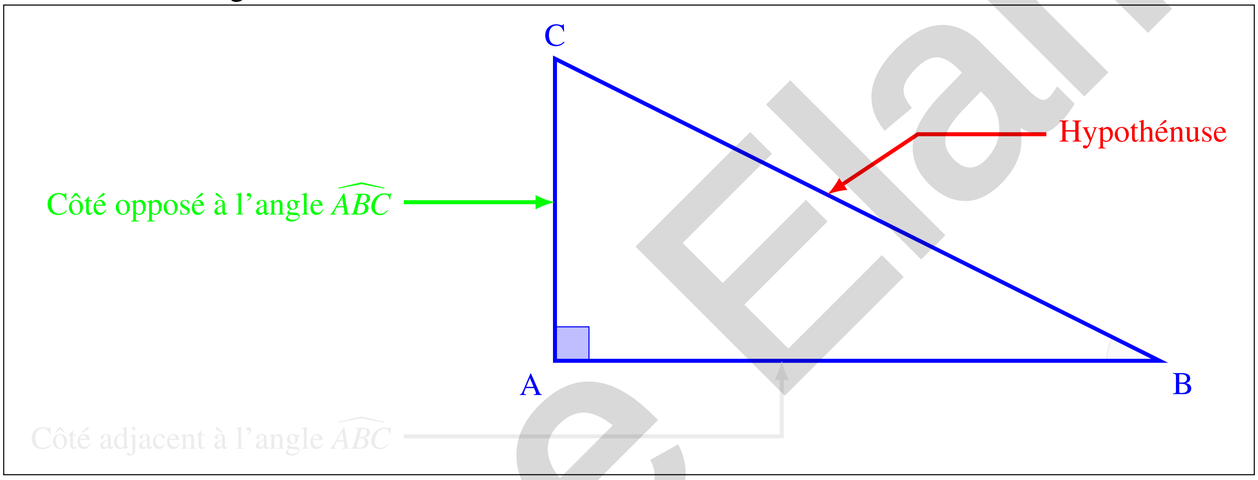
Calcul trigonométrique

Cours 3AC

I Les rapports trigonométriques d'un angle aigu

1 Vocabulaire

ABC est un triangle rectangle en A
On considère l'angle $\widehat{ABC}$



Remarque

- ★ De même pour l'angle $\widehat{ACB}$, le côté adjacent est AC et le côté opposé est AB
- ★ Les deux angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont aigus, c'est à dire : $0^\circ < \widehat{ABC} < 90^\circ$ et $0^\circ < \widehat{ACB} < 90^\circ$
- ★ L'hypoténuse est le plus grand côté parmi les côtés d'un triangle rectangle

2 Définition

Définition

Dans un triangle ABC rectangle en A, les rapports trigonométriques de l'angle $\widehat{ABC}$ sont :

☆ Le rapport $\dfrac{AB}{BC}$ s'appelle le cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$ symbolisé par $\cos\widehat{ABC}$

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{\text{Côté adjacent à l'angle } \widehat{ABC}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AB}{BC}$$

☆ Le rapport $\dfrac{AC}{BC}$ s'appelle le sinus de l'angle $\widehat{ABC}$ symbolisé par $\sin\widehat{ABC}$

$$\sin\widehat{ABC} = \frac{\text{Côté opposé à l'angle } \widehat{ABC}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AC}{BC}$$

☆ Le rapport $\frac{AC}{AB}$ s'appelle la tangente de l'angle $\widehat{ABC}$ symbolisé par $\tan\widehat{ABC}$

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{\text{Côté opposé à l'angle } \widehat{ABC}}{\text{Côté adjacent à l'angle } \widehat{ABC}} = \frac{AC}{AB}$$

Exemple

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : $AB = 3cm$, $AC = 4cm$ et $BC = 5cm$
Calculer les rapports trigonométriques de l'angle $\widehat{ABC}$ et de l'angle $\widehat{ACB}$

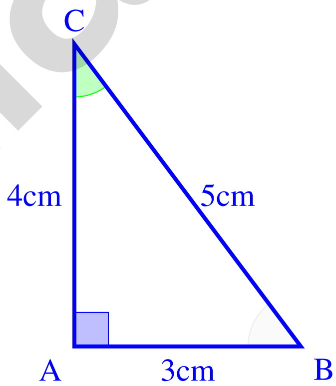
Solution

☆ Calcul des rapports trigonométriques de l'angle $\widehat{ABC}$

- $\cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} = 0.6$
- $\sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} = 0.8$
- $\tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3}$

☆ Calcul des rapports trigonométriques de l'angle $\widehat{ACB}$

- $\cos\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} = 0.8$
- $\sin\widehat{ACB} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} = 0.6$
- $\tan\widehat{ACB} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} = 0.75$



Application

Soit ABC un triangle tel que : $AB = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$ et $BC = 4$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle
2. Calculer les rapports trigonométriques de l'angle $\widehat{ABC}$
3. Calculer les rapports trigonométriques de l'angle $\widehat{ACB}$

Solution

1 Montrons que le triangle ABC est rectangle

On a $\begin{cases} AB^2 = 2^2 = 4 \\ AC^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12 \\ BC^2 = 4^2 = 16 \end{cases}$

On a $AB^2 + AC^2 = 4 + 12 = 16$
et $BC^2 = 16$
Donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$
Donc, d'après le théorème réciproque de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A

2 Calculons les rapports trigonométriques de l'angle $\widehat{ABC}$

- $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} = 0.5$
- $\sin\widehat{ABC} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan\widehat{ABC} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

3 Calculons les rapports trigonométriques de l'angle $\widehat{ACB}$

- $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin\widehat{ACB} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} = 0.5$
- $\tan\widehat{ACB} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3 L'emploi de la calculatrice dans le calcul trigonométrique

❶ En employant la calculatrice, calculer les valeurs approchés des rapports trigonométriques de l'angle $\alpha = 30°$
On a :

➥ $\cos 30° = 0.86$ ➥ $\sin 30° = \dfrac{1}{2} = 0.5$ ➥ $\tan 30° = 0.57$

❷ En employant la calculatrice, trouver la valeur de l'angle α dont les rapports trigonométriques sont respectivement : $\cos\alpha_1 = 0.5$, $\sin\alpha_2 = \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\tan\alpha_3 = 1$

En touchant les boutons $\boxed{\text{Shift}} + \left(\boxed{\text{Cos}} \text{ ou } \boxed{\text{Sin}} \text{ ou } \boxed{\text{Tan}}\right)$ on trouve :

➥ $\alpha_1 = 60°$ ➥ $\alpha_2 = 45°$ ➥ $\alpha_3 = 45°$

II Relation entre les rapports trigonométriques d'un angle aigu

1 Proposition : relation entre cos et sin d'un angle aigu

Proposition

Soit α la mesure d'un angle aigu $0° < \alpha < 90°$
On a $0 < \cos\alpha < 1$ et $0 < \sin\alpha < 1$ et $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

Remarque

☆ $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \Rightarrow \begin{cases}\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha\\ \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\end{cases}$

☆ C'est à dire, si on sait cos (sin), on peut calculer le sin (cos)

☆ On écrit $\cos^2 x$ ou $(\cos x)^2$ et pas $\cos x^2$ (de même pour sin)

Exemple

Soit α la mesure d'un angle aigu tel que $\cos\alpha=\frac{2}{3}$
calculer $\sin\alpha$

Solution

Calculons $\sin\alpha$

On sait que : $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$, donc $\left(\frac{2}{3}\right)^2+\sin^2\alpha=1$, donc $\frac{4}{9}+\sin^2\alpha=1$

Donc $\sin^2\alpha=1-\frac{4}{9}$, donc $\sin^2\alpha=\frac{5}{9}$, donc $\sin\alpha=\sqrt{\frac{5}{9}}$

Alors $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$

Application

Simplifier les expressions suivantes :

✷ $A=2\cos^2x+3\sin^2x-1$

✷ $B=(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2$

✷ $C=\sin^4x-\sin^2x+\cos^2x-\cos^4x$

✷ $D=\cos^4x+2\cos^2x\sin^2x+\sin^4x$

Solution

Simplifions les expressions proposées

$$\begin{aligned}
A &= 2\cos^2 x + 3\sin^2 x - 1\\
&= 2\cos^2 x + 2\sin^2 x + \sin^2 x - 1\\
&= 2\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) + \sin^2 x - 1\\
&= 2 + \sin^2 x - 1\\
&= 1 + \sin^2 x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2\\
&= \cos^2 x + \cancel{2\cos x \sin x} + \sin^2 x\\
&\quad + \cos^2 x - \cancel{2\cos x \sin x} + \sin^2 x\\
&= \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x\\
&= 1 + 1\\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= \sin^4 x - \sin^2 x + \cos^2 x - \cos^4 x\\
&= \sin^2 x\left(\sin^2 x - 1\right) + \cos^2\left(\cos^2 x - 1\right)\\
&= -\sin^2 x\cos^2 x + sin^2 x\cos^2 x\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &= \cos^4 x + 2\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x\\
&= \left(\cos^2 x\right)^2 + 2\cos^2 x\sin^2 x + \left(\sin^2 x\right)^2\\
&= \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2\\
&= 1^2\\
&= 1
\end{aligned}$$

2 Proposition : relation entre cos et sin et tan d'un angle aigu

Proposition

Soit α la mesure d'un angle aigu $0° < \alpha < 90°$

On a $\tan\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Remarque

☆ $\tan\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \tan\alpha \times \cos\alpha \\ \cos\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha} \end{cases}$

☆ α la mesure d'un angle aigu, on a $\tan\alpha > 0$

• Exemple

1 Soit x la mesure d'un angle aigu tel que $\tan x = 2\sqrt{2}$
Calculer $\cos x$ et $\sin x$

2 Soit x la mesure d'un angle aigu tel que $\sin x = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$
Calculer $\tan x$

Solution

1 Calculons $\cos x$ et $\sin x$

On a $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, donc $2\sqrt{2} = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, c'est à dire $\sin x = 2\sqrt{2}\cos x$

Or $\sin^2 + \cos^2 x = 1$, donc $\left(2\sqrt{2}\cos x\right)^2 + \cos^2 x = 1$

Donc $8\cos^2 x + \cos^2 x = 1$, donc $9\cos^2 x = 1$, donc $\cos^2 x = \dfrac{1}{9}$

D'où $\cos x = \sqrt{\dfrac{1}{9}}$ (car $\cos x > 0$) donc $\cos x = \dfrac{1}{3}$

Or $\sin x = 2\sqrt{2}\cos x$ donc $\sin x = 2\sqrt{2} \times \dfrac{1}{3}$

Alors $\sin x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

2 Calculons $\tan x$
Calculons d'abord $\cos x$

On a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, donc $\cos^2 x + \left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1$, donc $\cos^2 x + \dfrac{5}{9} = 1$

Donc $\cos^2 x = 1 - \dfrac{5}{9}$, donc $\cos^2 x = \dfrac{4}{9}$

D'où $\cos x = \sqrt{\dfrac{4}{9}}$ (car $\cos x > 0$)

Alors $\cos x = \dfrac{2}{3}$

On a $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{3\sqrt{5}}{6}$

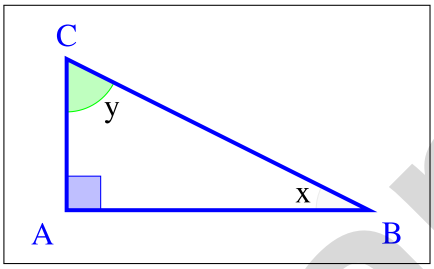
Alors $\tan x = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

3 Proposition : les rapports trigonométriques de deux angles complémentaires

Proposition

Soit x et y les mesures de deux angles complémentaires, c'est à dire $x+y=90°$
Alors

$\cos x=\sin y$
$\sin x=\cos y$
$\tan x=\dfrac{1}{\tan y}$



• Exemple

☆ $\sin 70°=\cos 20°$ ☆ $\cos 30°=\sin 60°$ ☆ $\tan 15°=\dfrac{1}{\tan 75°}$

☆ $\sin 80°=\cos 10°$ ☆ $\cos 45°=\sin 45°$ ☆ $\tan 11°=\dfrac{1}{\tan 79°}$

Application

Calculer

1. $A=\cos 5°+2\sin^2 22°-\sin 85°+2\sin^2 68°$
2. $B=\cos^2 14°+\cos^2 28°+\cos^2 76°+\cos^2 62°$
3. $C=5\sin^2 34°+3\cos^2 11°+5\sin^2 56°+3\cos^2 79°$

Solution

1. Calculons $A=\cos 5°+2\sin^2 22°-\sin 85°+2\sin^2 68°$

$$
\begin{aligned}
✷ \quad A &= \cos 5°+2\sin^2 22°-\sin 85°+2\sin^2 68° \\
&= \cancel{\cos 5°}+2\sin^2 22°-\cancel{\cos 5°}+2\cos^2 22° \\
&= 2\times\left(\sin^2 22°+\cos^2 22°\right) \\
&= 2\times 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

2. Calculons $B=\cos^2 14°+\cos^2 28°+\cos^2 76°+\cos^2 62°$

$$\begin{aligned}
\ast \quad B &= \cos^2 14^\circ + \cos^2 28^\circ + \cos^2 76^\circ + \cos^2 62^\circ \\
&= \cos^2 14^\circ + \cos^2 76^\circ + \cos^2 28^\circ + \cos^2 62^\circ \\
&= \cos^2 14^\circ + \sin^2 14^\circ + \cos^2 28^\circ + \sin^2 28^\circ \\
&= 1+1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

3 Calculons $C = 5\sin^2 34^\circ + 3\cos^2 11^\circ + 5\sin^2 56^\circ + 3\cos^2 79^\circ$

$$\begin{aligned}
\ast \quad C &= 5\sin^2 34^\circ + 3\cos^2 11^\circ + 5\sin^2 56^\circ + 3\cos^2 79^\circ \\
&= 5\sin^2 34^\circ + 5\sin^2 56^\circ + 3\cos^2 11^\circ + 3\cos^2 79^\circ \\
&= 5\sin^2 34^\circ + 5\cos^2 34^\circ + 3\cos^2 11^\circ + 3\sin^2 11^\circ \\
&= 5\left(\sin^2 34^\circ + \cos^2 34^\circ\right) + 3\left(\cos^2 11^\circ + \sin^2 11^\circ\right) \\
&= 5+3 \\
&= 8
\end{aligned}$$

4 Angles particuliers

x	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Indéfinie

• Exemple

Simplifier : $F = \sqrt{2}\cos 45° + \sin^2 30° + \sin^2 60° + \sqrt{3}\tan 30°$

Solution

Simplifions $F = \sqrt{2}\cos 45° + \sin^2 30° + \sin^2 60° + \sqrt{3}\tan 30°$

$$\begin{aligned}
✷ \quad F &= \sqrt{2}\cos 45° + \sin^2 30° + \sin^2 60° + \sqrt{3}\tan 30° \\
&= \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3} \\
&= \frac{2}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{3} = 1+\frac{4}{4}+1 \\
&= 1+1+1=3
\end{aligned}$$

✍ **Résultats supplémentaires**

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} \qquad \text{et} \qquad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
❦ \quad \frac{1}{1+\tan^2 x} &= \frac{1}{1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} \\
&= \frac{1}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \\
&= \frac{1}{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}} \\
&= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x}{1} \\
&= \cos^2 x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
❦ \quad \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} &= \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} \\
&= \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \\
&= \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}} \\
&= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x} \\
&= \frac{\sin^2 x}{1} \\
&= \sin^2 x
\end{aligned}$$