Fonctions logarithmes

I Fonction logarithme népérienne

1 Définition et propriétés algébrique

Activité

Soit f une fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$

1. Montrer que la fonction f admet une fonction primitive sur $]0,+\infty[$
2. Soit F une fonction primitive de la fonction f définie par : $\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ $F(xy) = F(x) + F(y)$, calculer $F(1)$

D Définition

La fonction logarithme népérienne est une fonction primitive de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ et qui s'annule en 1 ; on la note par ln

Conséquence immédiate :

- La fonction $x \to \ln(x)$ est définie sur $]0,+\infty[$
- La fonction $x \to \ln(u(x))$ est définie si : $u(x) > 0$
- $\ln(1) = 0$

Monotonie :

La fonction $x \to \ln(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, et sa fonction dérivée est $x \to \frac{1}{x}$

Donc la fonction $x \to \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

- $\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[\,;\, \ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- $\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[\,;\, \ln(a) \leq \ln(b) \Leftrightarrow a \leq b$

Exemple

1. Déterminons D_f l'ensemble de la définition de la fonction f définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\right)$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} > 0 \text{ et } x^2+1 \neq 0 \text{ et } x+1 > 0\right\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \;/\; \ln(x+1) > 0 \text{ et } x > -1\} \text{ car } (\forall x \in \mathbb{R})\ x^2+1 > 0)$$

Étudions le signe de $\ln(x+1)$, résolvons l'équation $\ln(x+1) = 0$

$$\begin{aligned}\ln(x+) = 0 &\Leftrightarrow \ln(x+1) = \ln(1)\\ &\Leftrightarrow x+1 = 1\\ &\Leftrightarrow x = 0\end{aligned}$$

Si $-1 < x \leq 0$ on a $0 < x+1 \leq 1$ donc $\ln(x+1) \leq 0$

Si $x \geq 0$ on a $x+1 \geq 1$ donc $\ln(x+1) \geq 0$

Donc $D_f =]0,+\infty[$

2 Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système (S) : $\begin{cases}\ln(xy) = \ln(2)\\ \ln(x+y) = \ln(3)\end{cases}$

$(S) : \begin{cases}\ln(xy) = \ln(2)\\ \ln(x+y) = \ln(3)\end{cases} \Leftrightarrow (S) : \begin{cases}xy = 2\\ x+y = 3\end{cases}$

Donc x et y sont les deux solutions de l'équation (E) : $x^2 - 3x + 2 = 0$

Le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = 1$

Donc $x = 1$ et $y = 2$, d'où l'ensemble des solution de système (S) est $S = \{1, 2\}$

Propriété

Propriété caractéristique : $(\forall x > 0\,;\, \forall y > 0)\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

Règle de calculs

1 $(\forall x > 0)\,;\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

2 $(\forall x > 0)(\forall y > 0)\,;\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

3 $(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q})\,;\ \ln(x^r) = r\ln(x)$

Preuve

1 $(\forall x > 0)\,;\ \ln\left(\frac{x}{x}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Donc : $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

2 $(\forall x > 0)(\forall y > 0)\,;\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right)$

Donc $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

Application

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$a)$ $\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) < \ln(x+1)$

b) $3\ln(x) \leq 2\ln(x)$

c) $\ln(x+2\ln(x+2)) = \ln(x+1)$

d) $\ln(x)\ln(x+1) = \ln(x)\ln(2+x)$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} \ln(x)+\ln(y) = \ln(2) \\ \ln(2)+\ln(x+y) = \ln(\sqrt{3}+1) \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} \ln(x+y) = \ln(-x+3) \\ \ln(x+2y) = \ln(3) \end{cases}$$

3 On considère la suite $(u_n)_{n>1}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})\,;\, u_n = 1-\frac{1}{n^2}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})\,;\, u_2 \times u_3 \times ... \times u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)$

b) Calculer en fonction de n ; $S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln(u_k)$

c) Déterminer $\lim S_n$

2 Étude et représentation graphique :

D'après la définition de la fonction $x \to \ln(x)$ on peut conclure que :

La fonction $x \to \ln(x)$ est définie, continue, dérivable et strictement croissante sur $]0,+\infty[$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty}$$

On pose $t = \frac{1}{x}$, alors : $x = \frac{1}{t}$ et $x \to 0^+ \Leftrightarrow t \to +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{t}\right) = -\ln(t) = -\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, alors la courbe de la fonction $x \to \ln(x)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0}$$

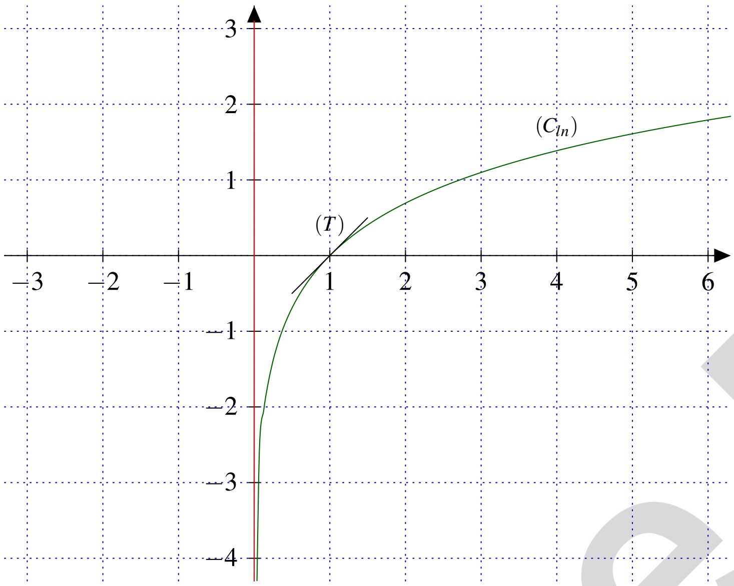
La courbe de la fonction $x \to \ln(x)$ admet une branche parabolique vers l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

Tableau de variations

La fonction $x \to \ln(x)$ est continue strictement croissante sur $]0,+\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ à valeur dans $\mathbb{R}$, d'où le réel 1 a un antécédent noté e (le nombre népérien) $\ln(e) = 1$

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

La courbe de la fonction ln



$(T) : y = x - 1$ est une droite tangente à la courbe $(C_{\ln})$ en $A(1,0)$

3 Dérivée de la fonction : $x \to \ln \ln u(x)$

Soient u une fonction dérivable, strictement positive sur un intervalle I, et v une fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $v(x) = \ln(x)$

Donc la fonction $v \circ u$ est bien définie et dérivable sur I et on a :

$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

T Théorème

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et strictement positive sur I alors la fonction $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et on a : $(\forall x \in I)\,;\, f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Exemple

On considère le fonction f définie sur $I =]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$

Comme la fonction $u : x \to \frac{x+1}{x-2}$ est strictement positive, et dérivable sur I, alors la fonction f est dérivable sur I et on a :

$(\forall x \in I)\,;\, f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{-3}{(x-2)^2}}{\frac{x+1}{x-2}} = -\frac{3}{(x+1)(x-2)}$

Corolaire

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I alors la fonction $f(x) = \ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I et on a $(\forall x \in I)$; $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I alors les fonctions primitives de la fonction $x \to \frac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions $x \to \ln(|u(x)|) + c^{te}$

Application

Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{x-6}{x^2-12x+4}$
2. $h(x) = \frac{1}{x^2-1}$
3. $g(x) = \tan(x)$
4. $u(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$
5. $v(x) = \frac{7}{2x^2+x-3}$

4 Limites référentielles :

Propriété

1− $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

2− $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0^-$

3− $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n\ln(x) = 0^-$; (avec $n \in \mathbb{N}^*$)

4− $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$

5− $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

6− $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$; (avec $n \in \mathbb{N}^*$)

7− $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$

8− $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

• **Preuve**

2− On pose $t = \frac{1}{x}$, alors $x = \frac{1}{t}$ et si $x \to 0^+$ on a : $t \to +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim\limits_{t\to +\infty} \frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim\limits_{t\to +\infty} -\frac{\ln(t)}{t} = 0^-$

3− $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n\ln(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{n-1}(x\ln(x)) = 0^-$

6− $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^{n-1}}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = 0$

7– Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\ln(x)$

On sait que f est dérivable en 1 et que : $f'(1)=1$

Par suite : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1$

8– On pose $t=x+1$, alors $x=t-1$ et si $x\to 0$ on a : $t\to 1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{\ln(t)}{t-1}=1$

Exemple

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+x)}{x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x^2-x}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^3+2x-2)}{x^2+4x-5}$

1 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)$

On pose $t=\frac{1}{x}$, alors $x=\frac{1}{t}$ et si $x\to+\infty$ on a $t\to 0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t}\left(\dfrac{\ln(1+t)}{t}\right)=+\infty$

Car : $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t}=+\infty$ et $\lim\limits_{t\to 0^+}\left(\dfrac{\ln(1+t)}{t}\right)=1$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x(x+1))}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x-1}+\dfrac{\ln(x+1)}{x-1}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(t)}{t}=0$ (on pose $t=x+1$, si $x\to+\infty$ on a $t\to+\infty$) et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=1$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+x)}{x-1}=0$

3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x^2+x}\times\dfrac{x^2+x}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x^2+x}\times\dfrac{x+1}{x-1}$

Et puisque $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x^2+x}=1$ car : on pose $t=x^2+x$, alors si $x\to 0$ on a $t\to 0$

Donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x^2+x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(t+1)}{t}=1$

Et aussi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x-1}=-1$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x}=-1$

4 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^3+2x-2)}{x^2+4x-5}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^3+2x-2)}{x^3+2x-2-1}\times\dfrac{x^3+2x-3}{x^2+4x-5}$

Comme : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^3+2x-2)}{x^3+2x-2-1}=1$ (car : on pose $t=x^3+2x-2$ alors si $x\to 1$ on a $t\to 1$)

donc $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^3+2x-2)}{x^3+2x-2-1}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{\ln(t)}{t-1}=1$

Et aussi $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x-3}{x^2+4x-5}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2+x+3)(x-1)}{(x+5)(x-1)}=\dfrac{5}{6}$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^3+2x-2)}{x^2+4x-5}=\dfrac{5}{6}$

Applicaton : 1

Partie I

On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=x-(x+1)ln(x+1)$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
2. Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ g'(x)=-ln(x+1)$
3. En déduire que la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, et que $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ g(x)\leq 0$

Partie II

On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{ln(x+1)-x}{x}$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$ avec $||\vec{i}||=2cm$ et $||\vec{j}||=2cm$

1. Étudier la continuité de f au point $x_0=0$:
2. Étudier la dérivabilité de f en 0, puis donner une interprétation géométrique de ce résultat. (Indication : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(x+1)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$)
3. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$, puis donner une interprétation géométrique de ces résultats.
4. a. Montrer que : $\forall x\in]-1,0[\cup]0,+\infty[$; $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2(x+1)}$
   b. Étudier les variations de f, puis dresser sa table de variations
5. Tracer (C_f) dans le repère orthonormé $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$

II Fonctions logarithmiques de base a

1 Définition et règles de calcul

a Définition

D Définition

Soit a un réel strictement positif et différents de 1

La fonction notée par $\log_a$ définie sur $]0,+\infty[$ par : $(\forall x \in]0,+\infty[)\,;\, \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

S'appelle : la fonction logarithmique de base a

Exemple

- Pour : $a = e$; on aura : $\log_e(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(e)} = \ln(x)$
- $\log_a(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(a)} = 1$

b Propriété et règles de calcul

Propriété

Toutes les propriétés de calcul qu'on a vu concernant la fonction ln restent valables pour la fonction $\log_a$.

- $(\forall x > 0)\ (\forall y > 0)\,;\, \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $(\forall x > 0)\,;\, \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$
- $(\forall x > 0)\ (\forall y > 0)\,;\, \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $(\forall x > 0)\ (\forall r \in \mathbb{Q})\,;\, \log_a(x^r) = r\log_a(x)$

• Preuve

Pour démontrer les propriétés précédentes il suffit d'utiliser la définition de la fonction $\log_a$ et les propriétés de la fonction ln

c La monotonie

Soit a un réel strictement positif et différents de 1

On considère la fonction f_a définie sur $]0,+\infty[$ par : $f_a(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Comme la fonction $x \to \ln(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, alors la fonction $f$est dérivable sur $]0,+\infty[$ Donc $(\forall x \in]0,+\infty[)\,;\, f'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$

Si $a \in]0,1[$ alors $\ln(a) < 0$

Donc $(\forall x \in]0,+\infty[)\,;\, f'(x) < 0$,

Alors f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

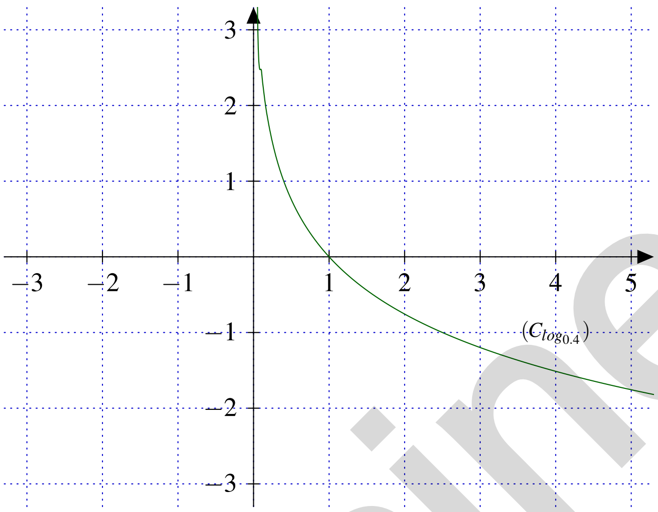
x	0	a	1	$+\infty$
$\ln(x)$	$+\infty$	1	0	$-\infty$

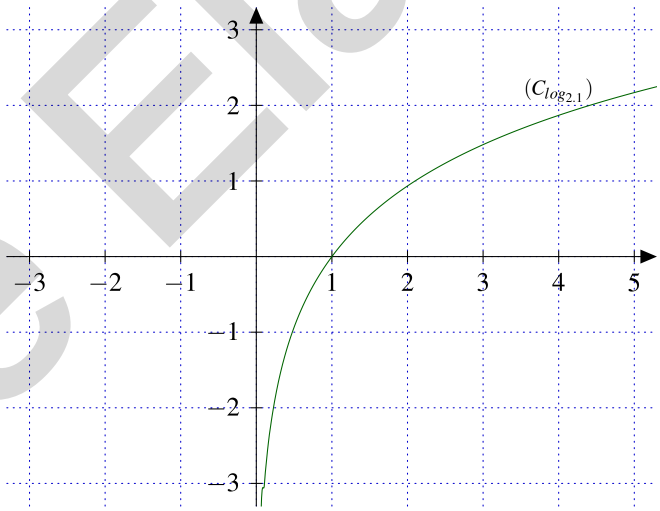
Si $a \in]1,+\infty$ alors $\ln(a) > 0$

Donc $(\forall x \in]0,+\infty[)\,;\, f'(x) > 0$,

Alors f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

x	0	1	a	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$





2 Cas particulier $a = 10$; logarithme décimal

D Définition

La fonction logarithmique de base 10 s'appelle la fonction logarithmique décimal et se note par log

$$(\forall x \in]0,+\infty[)\,;\, \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Propriété

1. $\log(10) = 1$
2. $(\forall x > 0)\ (\forall r \in \mathbb{Q})\,;\, \log(x) = r \Leftrightarrow x = 10^r$
3. $(\forall r \in \mathbb{Q})\,;\, \log\left(10^r\right) = r$
4. $(\forall x > 0)\ (\forall r \in \mathbb{Q})\,;\, \log(x) > r \Leftrightarrow x > 10^r$

5 $(\forall x>0)\ (\forall r\in\mathbb{Q})\,;\ \log(x)\leq r \Leftrightarrow 0<x\leq 10^{r}$

Preuve

1 $\log(10)=\frac{\ln(10)}{\ln(10)}=1\,;\ (\log_a(a)=1)$

2 $(\forall x>0)\ (\forall r\in\mathbb{Q})\,;\ \log(x)=r \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{\ln(10)}=r$

$$\Leftrightarrow \ln(x)=r\ln(10)$$
$$\Leftrightarrow \ln(x)=\ln(10^{r})$$
$$\Leftrightarrow x=10^{r}$$

3 $(\forall r\in\mathbb{Q})\,;\ \log\left(10^{r}\right)=r\log\left(10\right)=r$

4 $(\forall x>0)\ (\forall r\in\mathbb{Q})\,;\ \log(x)>r \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{\ln(10)}>r$

$$\Leftrightarrow \ln(x)>r\ln(10)\,;\ (\text{car } \ln(10)>0)$$
$$\Leftrightarrow \ln(x)>\ln(10^{r})$$
$$\Leftrightarrow x>10^{r}\,;\ (\text{car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante })$$

Application

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\log(x+1)=\log_{x+1}(x)$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\log_2(x)>\log_x(2)$