



Comparaison de deux nombres réels

1

Activités

Activité

Comparer a et b dans les cas suivants :

★) $a = \frac{15}{7}$ et $b = \frac{12}{7}$

★) $a = \frac{5}{4}$ et $b = \frac{11}{8}$

★) $a = \frac{15}{14}$ et $b = \frac{-12}{7}$

★) $a = \frac{6}{5}$ et $b = \frac{6}{11}$

Solution

Comparons a et b dans les cas suivants :

★) On a $15 > 12$ donc $\frac{15}{7} > \frac{12}{7}$ donc $a > b$

★) On a $\frac{15}{14} > 0$ et $\frac{-12}{7} < 0$ donc $\frac{15}{14} > \frac{-12}{7}$ donc $a > b$

★) On a $a = \frac{5}{4} = \frac{10}{8}$ et $10 < 11$ donc $\frac{5}{4} < \frac{11}{8}$ donc $a < b$

★) On a $5 < 11$ donc $\frac{6}{5} > \frac{6}{11}$ donc $a > b$

2

Règle

Règle

Soit a et b deux nombres réels

★ Si $a - b \leq 0$, alors $a \leq b$

★ Si $a - b \geq 0$, alors $a \geq b$

C'est à dire, pour comparer deux nombres réels, on étudie le signe de leur différence

3 Exemples

EXEMPLES

- 1 Comparer les nombres $a = \frac{4}{35}$ et $b = \frac{2}{15}$
- 2 Comparer les nombres $2\sqrt{3} - 4$ et $\sqrt{3} - 5$
- 3 Comparer x et y tel que : $x = y - 3$

Solution

- 1 Comparons $a = \frac{4}{35}$ et $b = \frac{2}{15}$

$$\text{On a : } a - b = \frac{4}{35} - \frac{2}{15} = \frac{12}{105} - \frac{14}{105} = \frac{12 - 14}{105} = \frac{-2}{105}$$

$$\text{Or : } \frac{-2}{105} < 0, \text{ donc } a - b < 0$$

$$\text{Alors } a < b$$
- 2 Comparons $2\sqrt{3} - 4$ et $\sqrt{3} - 5$

$$\text{On a : } (2\sqrt{3} - 4) - (\sqrt{3} - 5) = 2\sqrt{3} - 4 - \sqrt{3} + 5 = \sqrt{3} + 1$$

$$\text{Or : } \sqrt{3} + 1 > 0 \text{ donc } (2\sqrt{3} - 4) - (\sqrt{3} - 5) > 0$$

$$\text{Alors } 2\sqrt{3} - 4 > \sqrt{3} - 5$$
- 3 Comparons x et y tel que : $x = y - 3$

$$\text{On a : } x - y = (y - 3) - y = y - 3 - y = -3, \text{ donc } x - y < 0$$

$$\text{Alors : } x < y$$

Application

Comparer les deux nombres dans chaque cas

- 1 $\frac{12}{7}$ et $\frac{15}{14}$
- 2 $7 + \sqrt{2}$ et $-3\sqrt{2} - 1$
- 3 $\sqrt{3} - 1$ et $5\sqrt{3} + 4$

Solution

Comparons les deux nombres dans chaque cas

- 1 Comparons : $\frac{12}{7}$ et $\frac{15}{14}$

$$\text{On a : } \frac{15}{14} - \frac{12}{7} = \frac{15 - 24}{14} = \frac{-9}{14}$$

$$\text{Or } \frac{-9}{14} < 0 \text{ donc } \frac{15}{14} - \frac{12}{7} < 0$$

$$\text{Alors : } \frac{15}{14} < \frac{12}{7}$$
- 2 Comparons : $7 + \sqrt{2}$ et $-3\sqrt{2} - 1$

On a : $(7 + \sqrt{2}) - (-3\sqrt{2} - 1) = 7 + \sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 1 = 4\sqrt{2} + 8$

Or : $4\sqrt{2} + 8 > 0$ donc $(7 + \sqrt{2}) - (-3\sqrt{2} - 1) > 0$

Alors : $7 + \sqrt{2} > -3\sqrt{2} - 1$

3 Comparons : $\sqrt{3} - 1$ et $5\sqrt{3} + 4$

On a : $(5\sqrt{3} + 4) - (\sqrt{3} - 1) = 5\sqrt{3} + 4 - \sqrt{3} + 1 = 4\sqrt{3} + 5$

Or : $4\sqrt{3} + 5 > 0$ donc $(5\sqrt{3} + 4) - (\sqrt{3} - 1) > 0$

Alors : $\sqrt{3} - 1 < 5\sqrt{3} + 4$



Ordre et opérations

1 Ordre et addition

a Proposition

Proposition

Soit a , b et c trois nombres réels

★ Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$

★ Si $a + c \leq b + c$ alors $a \leq b$

• Exemple

Soit a et b deux nombres réels tel que : $a + 4 \leq b$

Montrer que : $a + 1 \leq b$

Solution

Montrons que : $a + 1 \leq b$

On a : $a + 4 \leq b$, donc $a + 4 - 3 \leq b - 3$

Alors : $a + 1 \leq b$

b Proposition

Proposition

Soit a , b , s et d trois nombres réels

★ Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$

• Exemple

Soit a et b deux nombres réels tel que : $a + 3 \leq 3$ et $b + 4 \leq \sqrt{2}$
 Montrer que : $a + b + 7 \leq \sqrt{2} + 3$

Solution

Montrons que : $a + b + 7 \leq \sqrt{2} + 3$
 On a : $a + 3 \leq 3$ et $b + 4 \leq \sqrt{2}$, donc $a + 3 + b + 4 \leq 3 + \sqrt{2}$
 Alors : $a + b + 7 \leq \sqrt{2} + 3$

2 Ordre et multiplication

a Activité

Activité

Soient a , b , et c trois nombres réels tel que : $a \leq b$

- 1 Supposons que $c > 0$, comparer ac et bc
- 2 Supposons que $c < 0$, comparer ac et bc

Solution

- 1 Supposons que $c > 0$, comparons ac et bc
 On a $ac - bc = c(a - b)$
 Or $a \leq b$ donc $a - b \leq 0$, et $c > 0$
 Donc $c(a - b) \leq 0$, c'est à dire $ac - bc \leq 0$
 Alors $ac \leq bc$
- 2 Supposons que $c < 0$, comparons ac et bc
 On a $ac - bc = c(a - b)$
 Or $a \leq b$ donc $a - b \leq 0$, et $c < 0$
 Donc $c(a - b) \geq 0$, c'est à dire $ac - bc \geq 0$
 Alors $ac \geq bc$

b Proposition

Proposition

Soit a , b et c trois nombres réels

- ★ Si $a \leq b$ et $c > 0$ donc $a \times c \leq b \times c$
- ★ Si $a \leq b$ et $c < 0$ donc $a \times c \geq b \times c$

Remarque

✦ Si $a \leq b$ alors $-a \geq -b$
C'est à dire, l'opposé change l'ordre

Exemple

Soient a et b deux nombres réels tel que : $a \geq \frac{4}{3}$ et $b \geq \sqrt{3}$
Dédurre un ordre de $3a$ et de $-2b$

Solution

★ Dédurre un ordre de $3a$
On a : $a \geq \frac{4}{3}$ donc $3 \times a \geq 3 \times \frac{4}{3}$ donc $3a \geq 4$ ★ Dédurre un ordre de $-2b$
On a : $b \geq \sqrt{3}$ donc $-2 \times b \leq -2 \times \sqrt{3}$ donc $-2b \leq -2\sqrt{3}$

c

Proposition

Proposition

Soient a, b, c et d des nombres réels positifs

Si $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases}$ Alors $a \times c \leq b \times d$

Exemple

Soient x et y deux nombres réels positifs tel que : $x < \sqrt{3}$ et $y < 6\sqrt{2}$
Montrer que : $xy < 6\sqrt{2}$

Solution

Montrons que : $xy < 6\sqrt{2}$

On a : $\begin{cases} x < \sqrt{3} \\ y < 6\sqrt{2} \end{cases}$ donc $x \times y < \sqrt{3} \times 6\sqrt{2}$ C'est à dire $x \times y < \sqrt{3} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ C'est à dire
 $x \times y < 2\sqrt{3}^2 \times \sqrt{2}$ C'est à dire $x \times y < 2 \times 3 \times \sqrt{2}$ C'est à dire $x \times y < 6 \times \sqrt{2}$ C'est à dire
 $xy < 6\sqrt{2}$

d Exercice d'application**Application**

Soient x et y deux nombres réels tel que : $x \geq 1$ et $y \geq 2$
 Montrer que : $(x-1)(y-2) \geq 0$

Solution

Montrons que : $(x-1)(y-2) \geq 0$
 On a $x \geq 1$ donc $x-1 \geq 0$
 et on a $y \geq 2$ donc $y-2 \geq 0$
 D'où $(x-1)(y-2) \geq 0$

3 Ordre et inverse**a Proposition****Proposition**

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs
 Si $a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ et la réciproque est vraie

Remarque

✪ L'inverse change l'ordre

b Exemples**EXEMPLES**

* On a $2 \leq 4$ donc $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}$
 * On a $11 > 5$ donc $\frac{1}{11} < \frac{1}{5}$

Application

Soit x un nombre réel tel que $x \geq 1$
 Montrer que : $\frac{-5}{x+2\sqrt{3}} \geq \frac{-5}{1+2\sqrt{3}}$

Solution

Montrons que : $\frac{-5}{x+2\sqrt{3}} \geq \frac{-5}{1+2\sqrt{3}}$

On a $x \geq 1$ donc $x + 2\sqrt{3} \geq 1 + 2\sqrt{3}$

Alors $\frac{1}{x+2\sqrt{3}} \leq \frac{1}{1+2\sqrt{3}}$

D'où $\frac{-5}{x+2\sqrt{3}} \geq \frac{-5}{1+2\sqrt{3}}$

4 Autres propriétés : Carré et racine carré

a Proposition

Proposition

(Carré) Soient a et b deux nombre réels positifs

★ $a \leq b$ est équivalent à $a^2 \leq b^2$

Remarque

★ a et b deux nombres réels négatifs

$a \leq b$ est équivalent à $a^2 \geq b^2$

★ L'ordre change dans les cas suivants :

- ▶ On multiplie par un nombre négatif
- ▶ On fait l'inverse
- ▶ On prend le carrés de deux nombres négatifs

EXEMPLES

- ① Comparer 3 et $2\sqrt{2}$
- ② Comparer $-2\sqrt{5}$ et $-3\sqrt{2}$

Solution

① Comparons 3 et $2\sqrt{2}$

On a $(2\sqrt{2})^2 = 4 \times 2 = 8$ et $3^2 = 9$

Donc $3^2 > (2\sqrt{2})^2$, alors $3 > 2\sqrt{2}$

② Comparons $-2\sqrt{5}$ et $-3\sqrt{2}$

On a $(2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20$ et $(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$

Donc $(2\sqrt{5})^2 > (3\sqrt{2})^2$, donc $2\sqrt{5} > 3\sqrt{2}$, alors $-2\sqrt{5} < -3\sqrt{2}$

b Proposition**Proposition**

(Racine carré) Soit a et b deux nombres réels positifs

★ Si $a \leq b$ alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

★ Si $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ alors $a \leq b$

Application

- 1 Comparer $3\sqrt{3}$ et $4\sqrt{2}$
- 2 Comparer $-\sqrt{91}$ et $-6\sqrt{3}$
- 3 Comparer les nombres $\sqrt{5} + 4$ et $\sqrt{3} + 4$

Solution

- 1 Comparons $3\sqrt{3}$ et $4\sqrt{2}$
 On a $(3\sqrt{3})^2 = 9 \times 3 = 27$ et $(4\sqrt{2})^2 = 16 \times 2 = 32$
 Or $27 < 32$ donc $(3\sqrt{3})^2 < (4\sqrt{2})^2$
 Alors $3\sqrt{3} < 4\sqrt{2}$
- 2 Comparons $-\sqrt{91}$ et $-6\sqrt{3}$
 On a $\sqrt{91}^2 = 91$ et $(6\sqrt{3})^2 = 36 \times 3 = 108$
 Or $91 < 108$ donc $\sqrt{91}^2 < (6\sqrt{3})^2$ donc $\sqrt{91} < 6\sqrt{3}$ Alors $-\sqrt{91} > -6\sqrt{3}$
- 3 Comparons $\sqrt{5} + 4$ et $\sqrt{3} + 4$
 On a $\sqrt{3}^2 = 3$ et $\sqrt{5}^2 = 5$
 Or $3 < 5$ donc $\sqrt{3}^2 < \sqrt{5}^2$ donc $\sqrt{3} < \sqrt{5}$
 Alors $\sqrt{3} + 4 < \sqrt{5} + 4$

**Encadrement****1 Encadrement d'une somme****Proposition**

On considère tous les nombres réels

Si $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$. Alors : $a + c \leq x + y \leq b + d$

• **Exemple**

Soit x et y deux nombres réels tel que : $2 \leq x \leq 5$ et $-3 \leq y \leq -1$
Encadrer $x + y$

Solution

Encadrons $x + y$

On a $2 \leq x \leq 5$ et $-3 \leq y \leq -1$ donc $2 + (-3) \leq x + y \leq 5 + (-1)$

Alors $-1 \leq x + y \leq 4$

2 Encadrement d'un opposé**Proposition**

Soit x un nombre réel tel que $a \leq x \leq b$

On a $-b \leq -x \leq -a$

• **Exemple**

Soit $-4 \leq x \leq 3$ donc $-3 \leq -x \leq 4$

3 Encadrement d'une différence**Proposition**

On considère tous les nombres réels

Si $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$. Alors : $a - d \leq x - y \leq b - c$

Remarque

On a $a - b = a + (-b)$

Donc pour encadrer $a - b$, on encadre d'abord $-b$ puis on applique la proposition 8 ([Proposition de l'encadrement d'une somme](#))

• **Exemple**

Soit x et y deux nombres réels tel que : $3 \leq x \leq 8$ et $-4 \leq y \leq 2$

Encadrer $x - y$

Solution

Encadrons $x - y$

On a $-4 \leq y \leq 2$ donc $-2 \leq -y \leq 4$ On a $3 \leq x \leq 8$ et $-2 \leq -y \leq 4$ donc $3 + (-2) \leq x + (-y) \leq 8 + 4$

Alors $1 \leq x - y \leq 12$

4 Encadrement d'un produit**Proposition**

On considère tous les nombres réels positifs

Si $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ Alors : $a \times c \leq x \times y \leq b \times d$

• Exemple

★ Cas 1 : tous les nombres sont positifs

On a $3 \leq x \leq 7$ et $1 \leq y \leq 4$

Encadrer xy

★ Cas 2 : l'un des nombres est positif et l'autre est négatif

On a $4 \leq x \leq 8$ et $-5 \leq y \leq -2$

Encadrer xy

Solution

★ Cas 1 : tous les nombres sont positifs

Encadrons xy

On a $3 \leq x \leq 7$ et $1 \leq y \leq 4$

Donc $3 \times 1 \leq xy \leq 7 \times 4$

Alors $3 \leq xy \leq 28$

★ Cas 2 : l'un des nombres est positif et l'autre est négatif

Encadrons xy

D'abord les deux nombres encadrants y doivent être positifs

On a $-5 \leq y \leq -2$ donc $2 \leq -y \leq 5$

On a $4 \leq x \leq 8$ et $2 \leq -y \leq 5$ (Remarquez que tous les nombres sont positifs)

Donc $4 \times 2 \leq x \times (-y) \leq 8 \times 5$

Donc $8 \leq -xy \leq 40$

Mais ce qu'on cherche, c'est encadrer xy et pas $-xy$, donc on se débarrasse du signe $-$

On a $8 \leq -xy \leq 40$ alors $-40 \leq xy \leq -8$

5 Encadrement d'un inverse

Proposition

Soient x , a et b des nombres réels non nuls tel que : $a \leq x \leq b$

On a : $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$

• Exemple

On a $2 \leq x \leq 4$ donc $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$

6 Encadrement d'un quotient

Proposition

On considère tous les nombres réels positifs

Si $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ tel que : $c \neq 0$; $y \neq 0$ et $d \neq 0$

Alors : $\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$

Remarque

On a $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$

Donc, pour encadrer $\frac{a}{b}$, on en cadre d'abord $\frac{1}{b}$, après on applique la proposition la proposition 11 ([Proposition de l'encadrement d'un produit](#))

• Exemple

★ Cas 1 : tous les nombres sont positifs

On a $6 \leq x \leq 10$ et $2 \leq y \leq 3$

Encadrer $\frac{x}{y}$

★ Cas 2 : l'un des nombres est positif et l'autre est négatif

On a $2 \leq x \leq 5$ et $-4 \leq y \leq -2$

Encadrer $\frac{x}{y}$

Solution

★ Cas 1 : tous les nombres sont positifs

Encadrons $\frac{x}{y}$ On a $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$ Encadrant d'abord $\frac{1}{y}$ On a $2 \leq y \leq 3$ donc $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$ On a $\begin{cases} 6 \leq x \leq 10 \\ \frac{1}{3} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ Donc $6 \times \frac{1}{3} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 10 \times \frac{1}{2}$ Alors $2 \leq \frac{x}{y} \leq 5$

★ Cas 2 : l'un des nombres est positif et l'autre est négatif

Encadrons $\frac{x}{y}$

On doit transformer les nombres négatifs en nombres positifs

On a $-4 \leq y \leq -2$ donc $2 \leq -y \leq 4$ Après on encadre l'inverse de $-y$ On a $2 \leq -y \leq 4$ donc $\frac{1}{4} \leq \frac{-1}{y} \leq \frac{1}{2}$ On a $\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ \frac{1}{4} \leq \frac{-1}{y} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ Donc $2 \times \frac{1}{4} \leq x \times \frac{-1}{y} \leq 5 \times \frac{1}{2}$ Donc $\frac{2}{4} \leq \frac{-x}{y} \leq \frac{5}{2}$ Donc $\frac{1}{2} \leq \frac{-x}{y} \leq \frac{5}{2}$ Alors $\frac{-5}{2} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{-1}{2}$ **Application****① Exercice 1 :**Soit a et b deux nombres réels tel que : $2 \leq a \leq 3$ et $-4 \leq b \leq -3$

Encadrer :

★ $a + b$

★ $a - b$

★ ab

★ $\frac{a}{b}$

② Exercice 2 :Soit a, b et c trois nombres réels tel que : $6 \leq a \leq 8$, $-4 \leq b \leq -2$ et $-3 \leq c \leq 5$

Encadrer :

★ a^2

★ b^2

★ $a + 2b - 4c$

★ $\frac{a+b}{b^2}$

Solution**① Exercice 1 :**★ Encadrons $a + b$ on a $2 \leq a \leq 3$ et $-4 \leq b \leq -3$ Donc $2 + (-4) \leq a + b \leq 3 + (-3)$ Alors $-2 \leq a + b \leq 0$ ★ Encadrons $a - b$ on a $2 \leq a \leq 3$ et $-4 \leq b \leq -3$ Donc $2 \leq a \leq 3$ et $3 \leq -b \leq 4$ Donc $2 + 3 \leq a + (-b) \leq 3 + 4$ Alors $5 \leq a - b \leq 7$

★ Encadrons ab on a $2 \leq a \leq 3$ et $-4 \leq b \leq -3$ Donc $2 \leq a \leq 3$ et $3 \leq -b \leq 4$ Donc $2 \times 3 \leq a \times (-b) \leq 3 \times 4$ Donc $6 \leq -ab \leq 12$ Alors $-12 \leq ab \leq -6$ ★ Encadrons $\frac{a}{b}$ on a $2 \leq a \leq 3$ et $-4 \leq b \leq -3$ Donc $2 \leq a \leq 3$ et $3 \leq -b \leq 4$ Donc $2 \leq a \leq 3$ et $\frac{1}{4} \leq \frac{-1}{b} \leq \frac{1}{3}$ Donc $2 \times \frac{1}{4} \leq a \times \frac{-1}{b} \leq 3 \times \frac{1}{3}$ Donc $\frac{2}{4} \leq \frac{-a}{b} \leq \frac{3}{3}$ Donc $\frac{1}{2} \leq \frac{-a}{b} \leq 1$ Donc $-1 \leq \frac{a}{b} \leq \frac{-1}{2}$

② Exercice 2 :

★ Encadrons a^2 On a $6 \leq a \leq 8$ donc $6^2 \leq a^2 \leq 8^2$ Alors $36 \leq a^2 \leq 64$ ★ Encadrons b^2 On a $-4 \leq b \leq -2$ Donc $(-2)^2 \leq b^2 \leq (-4)^2$ Alors $4 \leq b^2 \leq 16$ ★ Encadrons $a + 2b - 4c$ On a $-4 \leq b \leq -2$ donc $-8 \leq 2b \leq -4$ On a $-3 \leq c \leq 5$ Donc $-20 \leq -4c \leq 12$ On a $\begin{cases} 6 \leq a \leq 8 \\ -8 \leq 2b \leq -4 \\ -20 \leq -4c \leq 12 \end{cases}$ Donc $6 - 8 - 20 \leq a + 2b - 4c \leq 8 - 4 + 12$ Alors $-22 \leq a + 2b - 4c \leq 16$ ★ Encadrons $\frac{a+b}{b^2}$ On a $\begin{cases} 6 \leq a \leq 8 \\ -4 \leq b \leq -2 \end{cases}$ Donc $6 - 4 \leq a + b \leq 8 - 2$ Donc $2 \leq a + b \leq 6$ Et on a $4 \leq b^2 \leq 16$ donc $\frac{1}{16} \leq \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{4}$ On a $\begin{cases} 2 \leq a + b \leq 6 \\ \frac{1}{16} \leq \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{4} \end{cases}$ Donc $2 \times \frac{1}{16} \leq (a+b) \frac{1}{b^2} \leq 6 \times \frac{1}{4}$ Donc $\frac{2}{16} \leq \frac{a+b}{b^2} \leq \frac{6}{4}$ Alors $\frac{1}{8} \leq \frac{a+b}{b^2} \leq \frac{3}{2}$