Chapitre

La Droite dans le plan

Les orientations pédagogiques 1	Capacités attendues
-Il faudra habituer les élèves à lutilisation des différentes méthodes pour exprimer la colinéarité de deux vecteurs.	-Exprimer les notions et les propriétés de la géométrie affine et de la géométrie vectorielle à laide des coordonnées - Utiliser loutil analytique dans la résolution de problèmes géométriques

Le contenue du cours
-Le repère : coordonnées dun point, coordonnées dun vecteur - Condition de colinéarité de deux vecteurs - Détermination dune droite définie par la donnée dun point et dun vecteur directeur -Représentation paramétrique dune droite -Équation cartésienne dune droite -Positions relatives de deux droites.

I Repère

Définition

$(O;I,J)$ est un repère du plan. Il est constitué d'un triplet de points non alignés.

1. O est appelé origine du repère
2. La droite graduée $(O;I)$ est l'axe des abscisses.
3. La droite graduée $(O;J)$ est l'axe des ordonnées.

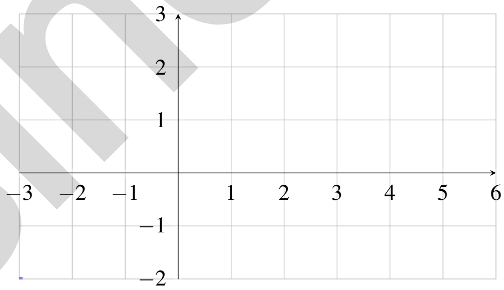
Le repère (O,I,J) se note aussi $(O;\vec{i};\vec{j})$ et le couple $(\vec{i};\vec{j})$ s'appelle la base du repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ et on dit que le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ ou d'une base $(\vec{i};\vec{j})$.

T Théorème

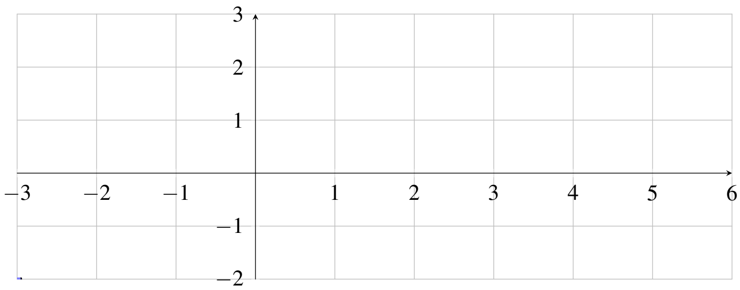
On note $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$.
On munit le plan d'un repère $(O;I;J)$. Chaque point M du plan est repéré par un couple de nombres $(x;y)$ appelé coordonnées du point M et on note $M(x;y)$. x est l'abscisse du point et y est leur ordonnée.

3 types de repères (selon le maillage) :

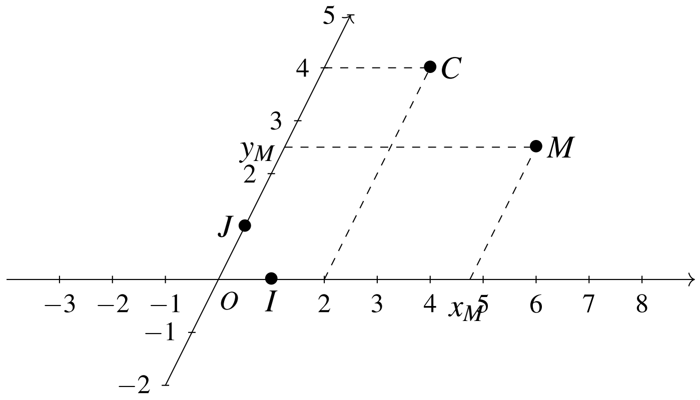
1. **Repère orthonormal ou orthonormé :** La maille est un carré. Les axes sont perpendiculaires en O et $OI=OJ=1$.



2. **Repère orthogonal :** La maille est un rectangle. Les axes sont perpendiculaires en O.



3. **Repère quelconque :** La maille est un parallélogramme

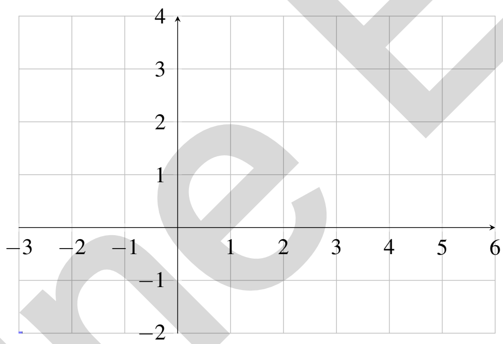


Exemple

Dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}\,; \vec{j})$, placer les points de coordonnées suivantes :

$A(2;3)$ $B(3;-1)$ $C(-2;-1)$

$D(3;0)$ $E(-2;3)$ $F(0;-1)$



II Calculs dans un repère du plan

1 Coordonnées ponctuelles

T Théorème

Le plan (P) étant muni d'un repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$.
Pour tout point M il existe un et un seul couple $(x;y)$ de réels tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$.
Le couple $(x;y)$ est le couple des coordonnées de M dans le repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$; on note $M(x;y)$.
Le réel x est l'abscisse de M et le réel y est l'ordonnée de M.

2 coordonnées vectorielles

Propriété

Dans le repère $(O;I;J)$, on considère les points $A(x_A;y_A)$, et $B(x_B;y_B)$.

1. Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $(x_B-x_A;y_B-y_A)$,
2. Coordonnées du milieu I d'un segment $[AB]$: $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$,
3. Distance de A à B : $d(A;B)=AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Propriété

Dans le repère $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}(a;b)$ et $\overrightarrow{v}(a';b')$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées : $a+a'$ et $b+b'$. C'est a dire que : $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\left(a+a',b+b'\right)$.
2. Pour tout réel k, le vecteur $k\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées : ka et kb. C'est a dire que : $k\overrightarrow{u}\left(ka,kb\right)$.

Application

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. On considère des deux point A et B tels que $A(0;5)$ et $B(4;-9)$.

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Déterminer les coordonnées du milieu du segment $[AB]$.
3. calculer la distance AB.

3 Colinéarité et égalité de deux vecteurs

Propriété

Soient $\overrightarrow{u}(x;y)$, $\overrightarrow{v}(x';y')$ deux vecteurs non nuls dans un repère $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$ et k un réel

1. **Égalité de deux vecteurs :**
   Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales
   $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}$ signifie $\begin{cases} x=x' \\ y=y' \end{cases}$
2. **Colinéarité de deux vecteurs :**
   Les vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{v}=k\overrightarrow{u}$ où $k\in\mathbb{R}$.
   C'est-à dire $xy'-yx'=0$.
   Le réel $xy'-yx'$ s'appelle le **déterminant** des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.
   On l'écrit :
   $$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=xy'-yx'$$

Remarque

Si le déterminant de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ n'est pas nul, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires ; il font alors une base du plan.

Exemple

Soient les vecteurs $\overrightarrow{u}(1;-3)$, $\overrightarrow{v}(5;3)$ et $\overrightarrow{w}(5x;x+y)$ alors :

1. $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{w}$ signifie $\begin{cases}5x=5\\x+y=3\end{cases}$ signifie $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$
2. $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}(1+5;-3+3)=(6;0)$
3. $-\overrightarrow{u}(-1;3)$
4. $5\overrightarrow{v}(5\times5;5\times3)=(25;15)$
5. $-\overrightarrow{u}+5\overrightarrow{v}(-1+25;3+15)=(24;18)$

Exemple

On considère les trois vecteurs du plan suivants : $\overrightarrow{u}(2;-3)$, $\overrightarrow{v}(-6;9)$ et $\overrightarrow{w}(5;-7)$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires car $\begin{vmatrix}2 & -6\\-3 & 9\end{vmatrix}=2\times9-(-3)\times(-6)=18-18=0.$
2. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas colinéaires car $\begin{vmatrix}2 & 5\\-3 & -7\end{vmatrix}=2\times(-7)-(-3)\times5=1\neq0.$

Exercice

Soit $(\vec{i};\vec{j})$ une base du plan. On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que : $\vec{u}=(3x+1)\vec{i}+2\vec{j}$ et $\vec{v}=4\vec{i}+(y-3)\vec{j}$ avec x et y sont des réels.

1. Le vecteur $\vec{u}$ peut-il être nul ?
2. Déterminer x et y sachant que $\vec{u}=\vec{v}$

Exercice

On considère dans le plan muni de la base $(\vec{i};\vec{j})$ les vecteurs $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}$; $\vec{v}=3\vec{i}+2\vec{j}$ et $\vec{w}(3;5)$
Calculer $\det(\vec{u};\vec{v})$, $\det(\vec{v};\vec{w})$ et $\det(\vec{w};\vec{v})$.

III Droite dans le plan

1 Vecteur directeur d'une droite

Définition

Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan (P) et soient A et B deux points de la droite $\mathscr{D}$.

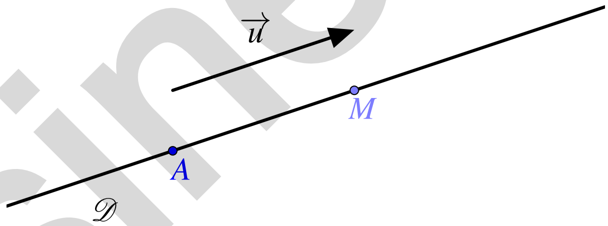
1. Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul et colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ s'appelle un **vecteur directeur** de la droite $\mathscr{D}$.
2. La droite $\mathscr{D}$ s'appelle la droite qui passe par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et on la note $\mathscr{D}(A, \overrightarrow{u})$.
3. La droite $\mathscr{D}$ a une infinité de vecteur directeur.

Définition

Le plan (P) est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
L'ensemble de point M du plan (P) vérifiant $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u}$ où $k \in \mathbb{R}$, est la droite $\mathscr{D}$ qui passe par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

Propriété

Soit $\mathscr{D}$ la droite qui passe par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
M est un point de la droite $\mathscr{D}$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.



2 Représentation paramétrique d'une droite

Définition

Soit $\mathscr{D}$ une droite dans un plan (P) muni d'un repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.
Soient $A(x_A; y_A)$ un point de $\mathscr{D}$ et $\overrightarrow{u}(\alpha;\beta)$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.
Le système : $\begin{cases} x = x_A + \alpha k \\ y = y_A + \beta k \end{cases}$ / $k \in \mathbb{R}$, s'appelle une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}(A, \overrightarrow{u})$.

• Exemple

Le système : $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$ $/ \ t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ qui passe par le point $A(1;-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-2;3)$.

3 Équation cartésienne d'une droite

Propriété

Le plan (P) est muni d'un repère $(O;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ )$.
Toute droite dans le plan (P) a une équation cartésienne soit de la forme $ax+by+c=0$ où $(a;b) \neq (0;0)$.
Réciproquement : Soient a, b et c trois nombres réels tel que $(a;b) \neq (0;0)$.
L'ensemble de point $M(x,y)$ du plan (P) vérifiant $ax+by+c=0$ est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-b;a)$.

Remarque

1. Si la droite $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées alors son équation cartésienne s'écrit sous la forme $x = a$ où $a \in \mathbb{R}$.
2. Si la droite $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des abscisses alors son équation cartésienne s'écrit sous la forme $y = b$ où $b \in \mathbb{R}$.

Application

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. On considère la droite (D) passant par les points $A(3;-2)$ et $B(5;4)$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D).

T Théorème

Une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par le point $A(x_A;y_A)$ et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}(\alpha;\beta)$ s'obtient en considérant un point $M(x;y)$ du plan et en annulant le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$:

$$(\mathscr{D}) : \quad \begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{vmatrix} = 0$$

Application

Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par les points $A(1;2)$ et $B(-1;3)$.

4 l'équation réduite d'une droite

T Théorème

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
Toute droite $\mathscr{D}$ a une équation soit de la forme $x=c$ soit de la forme $y=mx+p$.
L'équation $y=mx+p$ s'appelle l'équation réduite de la droite $\mathscr{D}$ tels que :

1. Le nombre réel m est le coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}$.
2. Le nombre réel p est l'ordonnée à l'origine de la droite $\mathscr{D}$.
3. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

5 Positions relatives de deux droites

Propriété

Deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équations respectives $y=mx+p$ et $y=m'x+p'$ sont :

1. parallèles si et seulement si $m=m'$.
2. sécantes si et seulement si $m\neq m'$.

T Théorème

Les équations $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ définissent, dans un repère, deux droites respectives $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

1. Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b\neq 0$, les droites ne sont pas parallèles et on dit elles sont **concourantes ou sécantes**.
2. Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b=0$ les droites sont parallèles .

Application

On considère les droites (D_1), (D_2) et (D_3) définies par : $(D_1) : 5x-3y+2=0$,
$(D_2) : 2x-\frac{1}{3}y-1=0$ et $(D_3) : 6x-y+3=0$

1. Montrer que les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes.
2. Montrer que les droites (D_2) et (D_3) sont parallèles.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par $A(1;2)$ et parallèle à la droite (D_1).

IV Étude du signe de $ax+by+c$

T Théorème

Le réel $ax+by+c$, associé à tout point $M(x;y)$ du plan est :

1. **nul** lorsque M appartient à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $ax+by+c=0$;
2. **strictement positif** lorsque M appartient à l'un des demi-plan ouverts de frontière $\mathscr{D}$;
3. **strictement négatif** lorsque M appartient à l'autre demi-plan .

• Exemple

Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M(x;y)$ du plan tel que : $2x+3y-12>0$.
L'ensemble $\mathscr{E}$ cherché est l'un des demi-plan ouverts de frontière la droite $\mathscr{D}$ d'équation :

$$2x+3y-12=0$$

Le réel associé au point $O(0;0)$ est -12. Ce point n'appartient pas à $\mathscr{E}$.
Par suite, $\mathscr{E}$ est le demi-plan ouvert de la frontière $\mathscr{D}$ ne contenant pas O.
On hachure le demi-plan qui ne convient pas.