Fonctions logarithmiques

I Série d'exercices

Exercice : 1 :

Simplifier les expressions suivantes :

- $\ln\sqrt{3}+\ln 27-\ln 9$
- $\ln 8+\ln\sqrt[3]{2}-\ln 16$
- $\ln\frac{1}{3}+\ln\frac{3}{5}+\ln\frac{7}{9}$
- $\ln(\sqrt{2}+1)+\ln(\sqrt{2}-1)$
- $\ln^2(2-\sqrt{3})-\ln^2(2+\sqrt{3})$
- $\ln\sqrt{e}-3\ln(e^2)+\ln(2e)+\ln(\frac{1}{e})$

Exercice : 2 :

Déterminer le domaine de définition de f de les cas suivantes :

- $f(x)=\ln(1-|x|)$
- $f(x)=\ln(3x+1)+\ln(x+2)$
- $f(x)=\dfrac{\ln(x+2)}{x}$
- $f(x)=\ln\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)$
- $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$
- $f(x)=\ln\big((3x+1)(x+2)\big)$

Exercice : 3 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $x\ln x=0$
- $\ln(x+3)+\ln(x+2)=\ln(x+1)$
- $\ln x=3$
- $\ln(3x)=\ln(x+1)$

- $\ln^2(x)+\ln(x^3)=4$

Exercice : 4 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- $\ln x \geqslant 1$
- $\ln(x^2-4)<0$
- $(\ln x)^2+3\ln x-4\leqslant 0$
- $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\geqslant \ln x$
- $\ln(x^2-16)\geqslant \ln(2x)$

Exercice : 5 :

Calculer les limites suivantes

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln x+1}{x}$
- $\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
- $\lim_{x\to+\infty}x\left[\ln(1+\sqrt{x})-\frac{\ln x}{2}\right]$
- $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^5}+\ln x\right)$
- $\lim_{x\to+\infty}\left[x+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$
- $\lim_{x\to \mathrm{E}}\frac{\ln x-1}{x-\mathrm{E}}$
- $\lim_{x\to-\infty}\left[x^2+\ln(x^2+1)\right]$
- $\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x^3}$

Exercice : 6 :

Donner sa fonction dérivée de

- $f(x)=\ln(1+x^2)$

- $g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
- $h(x) = \ln(\ln x)$
- $u(x) = \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$
- $v(x) = \ln(\sqrt{1-2x})$

Exercice : 7 :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - x - \ln x$$

1. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. Étudier les branches infinies de (C_f).
3. Montrer que :
$$\forall x \in]0;+\infty[:\ f'(x) = \frac{(x-1)(2x+1)}{x}$$
4. Déduire les variation de f sur $]0;+\infty[$.
5. Monter que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f(x) \geqslant 0$ et interpréter.
6. Étudier la concavité de (C_f).
7. Étudier la position de (C_f) et la droite $(\Delta) : y = -x$
8. Tracer la courbe (C_f).

Exercice : 8 :

Soit g la fonction définie par :
$$g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

1. Déterminer D_g le domaine de définition de la fonction g.
2. Calculer les limites de g aux bornes de D_g
3. Étudier les branches infinies de (C_g).
4. Déterminer g' et donner le tableau de variations.
5. Tracer la courbe (C_g).

Exercice : 9 :

Soit h la fonction définie par :

$$h(x) = x^2 - 1 - (\ln x)^2$$

1. Déterminer D_h le domaine de définition de h.
2. Calculer les limites de h aux bornes de D_h
3. Étudier les branches infinies de (C_h)
4. Donner le tableau de variations de h
5. Étudier l'intersection de (C_h) et l'axe d'abscisses
6. Tracer la courbe (C_h).