Chapitre

Fonctions logarithmes

Série d'exercices

Exercice : 1

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{3}{1-\ln(x)}$
2. $g(x) = \ln(5-x) + \ln(x^2-3)$
3. $u(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln^2(x)}$
4. $v(x) = \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{1-\ln(x)}\right)$

Exercice : 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

1. $\ln(-x^2+2x) = 0$
2. $\ln(x+4) + (x-1) - \ln((x+4)^2) = 0$
3. $\ln(-x^2+2x) > 0$
4. $\ln(x+4) + (x-1) - \ln((x+4)^2) \leq 0$
5. $\ln(x) + \ln(x+3) = 2\ln(2)$
6. $\sin(\ln(x)) = \sin\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)$
7. $\ln(x) + \ln(x^2-5) > \ln(2) + \ln(x^2-3)$
8. $\ln^2(x) - \ln(x) - 2 < 0$

Exercice : 3

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) - x$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\sqrt{x}+x^2\right)}{x-1} + \frac{x}{\ln(x)}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)-x}{x^2}$

4 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\ln(x+1)-x)}{x^2}$

5 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln(\tan(x)))}{\tan(x)-1}$

Exercice : 4

On considère la suite $(u_n)_{n>1}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$; $u_n = 1 - \frac{1}{n^2}$

1 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$
$u_2 \times u_3 \times \ldots \times u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)$

2 Calculer en fonction de n
$S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln(u_k)$

3 Déterminer $\lim S_n$

Exercice : 5

Soient a et $b$deux réels strictement positifs, montrer que $(\forall a > 0)$ $(\forall b > 0)$
$\ln(2) + \frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) \leq \ln(a+b)$

Exercice : 6

Soit g la fonction numérique définie sur $I = [a, +\infty[$ par :
$g(x) = \frac{x^2-a^2}{2ax} - \ln\left(\frac{x}{a}\right)$; avec $a \in \mathbb{R}_+^*$

1 Étudier les variations de g

2 Montrer que : $\forall x \in I$
$\ln\left(\frac{x}{a}\right) < \frac{x^2-a^2}{2ax}$

3 Montrer que : $\forall x \in I$
$2\frac{x-a}{x+a} < \ln\left(\frac{x}{a}\right)$

Exercice : 7

Soient a ; b et c trois réels strictement positifs On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln(abx) - 3\ln(a+b+x)$

1 Étudier les variations de f

2 En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$
$f(x) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

3 Montrer que : $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq -3\ln(3)$

4 En déduire que : $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$

Exercice : 8

On considère la fonction f_n définie sur $]0,+\infty[$ par :
$f_n(x) = \frac{lnx}{n} - \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

1 Calculer $\lim_{x\to 0^+} f_n(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$

2 Calculer $f_n'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$

3 Étudier les variations de f_n

4 En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique u_n

Exercice : 9

Partie I

On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x) = x-(x+1)ln(x+1)$

1 Calculer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

2 Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$
$g'(x) = -ln(x+1)$

3 En déduire que la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, et que
$(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ g(x) \leq 0$

Partie II

On considère la fonction f définie sur
$]-1,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{ln(x+1)-x}{x}$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$
avec $||\vec{i}|| = 2cm$ et $||\vec{j}|| = 2cm$

1 Étudier la continuité de f au point $x_0 = 0$:

2 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ on pose
$h(t) = t^2(ln(x+1)-x) - x^2(ln(t+1)-t)$

a Montrer que : $(\exists c \in]0,x[)$
$h'(c) = 0$

b En déduire que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(x+1)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$

3 Étudier la dérivabilité de f en 0, puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.

4 Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$, puis donner une interprétation géométrique de ces résultats.

5 a Montrer que :
$\forall x\in]-1,0[\cup]0,+\infty[$
$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2(x+1)}$

b Étudier les variations de f, puis dresser sa table de variations

6 Tracer (C_f) dans le repère orthonormé $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$

Exercice : 10

Partie I

On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$

1 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$

2 a Montrer que : $(\forall x>0)$
$g'(x)=-\frac{x+2}{x(x+1)^2}$

b Étudier les les variations de g

c Montrer que : $(\forall x>0)$; $g(x)>0$

Partie II

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=x^2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) & x>0 \\ f(x)=\frac{x}{\ln(1-x)}+1 & x<0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1 Étudier la continuité de f en 0

2 Étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en point 0 , puis donner une interprétation géométrique de ces résultats

3 a Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}$

b En déduire les branches infinies de la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$

4 a Calculer $f'(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}^*$

b Étudier les variations de f

5 Tracer la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice : 11

Soit f une fonction définie par :
$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f
2. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
   b. Montrer que $(\forall x\in D_f)$
   $f(x)=-\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$
   c. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
   d. Étudier les branches infinies de (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$
3. Étudier les variation de f
4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J à déterminer.
5. Tracer (C_f) et (C_f^{-1})

Exercice : 12

On considère la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par : $\begin{cases} h(x)=\frac{\ln(x)}{x-1} & x\neq 1\\ h(1)=1 \end{cases}$

1. Vérifier que h est continue en 1
2. Montrer que $\forall x\in\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[\,;\, x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\leq \ln(x+1)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$
3. Étudier la dérivabilité de h en 1

Exercice : 13

On considère la fonction f définie par :
$f_a(x)=\ln(\alpha x+(1-\alpha)a)-\alpha x$
Avec $\alpha\in]0,1[$ et $a\in\mathbb{R}_+^*$

1. Calculer $f_a'(x)\,;\,\forall x\in\mathbb{R}_+^*$
2. Étudier les variations de f_a
3. En déduire $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$
   $f_(x)\geq(1-\alpha)\ln(a)$
4. En déduire $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*)$
   $\alpha x+(1-\alpha)y\geq x^\alpha y^{1-\alpha}$

Exercice : 14

On considère la fonction g définie par : $g(x)=\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\cos(x)}\right)$

1. Déterminer D_g l'ensemble de la définition de la fonction g
2. Calculer les limite de g aux borne de D_g