Chapitre

Calcul Trigonométrique

Les orientations pédagogiques	Capacités attendues
.La simplicité est recommandé pour présenter ce chapitre en utilisant tout les technique connu par l'élève . Utiliser le cercle trigonométrique pour résoudre des inéquation trigonométrique simple sur des intervalles de $\mathbb{R}$.	. Maitriser les différentes formules de transformation ; . Résoudre les équations et les inéquations trigonométriques se ramenant à la résolution d'équations et d'inéquations fondamentales ; . Représenter et lire les solutions d'une équation et d'une inéquation sur le cercle trigonométrique.

Les prés-requis	Les extensions
Calcul trigonométrique . Équations inéquations et systèmes . Le produit scalaire .	Les limites La dérivation les nombres complexes

Rappel

1 Compléter le tableau suivant par le signe de $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$:

θ	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(\theta)$					
$\cos(\theta)$					
$\tan(\theta)$					

2 Compléter le tableau suivant :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(\theta)$									
$\cos(\theta)$									
$\tan(\theta)$									

3 Compléter les transformations suivantes :
Pour tout réel θ, on a :

$\cos(-\theta) = \dots\dots\dots\dots$, $\sin(-\theta) = \dots\dots\dots\dots$

$\cos(\pi+\theta) = \dots\dots\dots\dots$, $\sin(\pi+\theta) = \dots\dots\dots\dots$

$\cos(\pi-\theta) = \dots\dots\dots\dots$, $\sin(\pi-\theta) = \dots\dots\dots\dots$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \dots\dots\dots\dots$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \dots\dots\dots\dots$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \dots\dots\dots\dots$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \dots\dots\dots\dots$

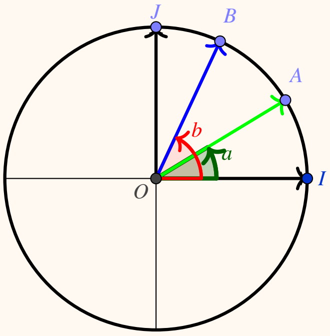
$\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta) = \dots\dots\dots$, $\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \dots\dots\dots\dots / \theta \neq \frac{\pi}{2}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$

I Formules de transformation :

1 Formules d'addition :

Activité

Soient (P) un plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$ et soient (U) le cercle trigonométrique et a et b deux réels.
On considère les points A et B du cercle (U) tels que :
$(\vec{i};\overrightarrow{OA}) \equiv a[2\pi]$ et $(\vec{i};\overrightarrow{OB}) \equiv b[2\pi]$.



1. Montrer que : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv (b-a)[2\pi]$.
2. Calculer $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ et déduire que $\cos(b-a) = \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$.
3. Montrer que : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$.
4. Montrer que : $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$.
5. Déduire que : $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$.
6. Montrer que : $\cos(2a) = 2\cos^2(a)-1$ et $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.
7. Montrer que : $\tan(a-b) = \dfrac{tan(a)-tan(b)}{1+tan(a).tan(b)}$.

   En déduire que : $\tan(a+b) = \dfrac{tan(a)+tan(b)}{1-tan(a).tan(b)}$ et $\tan(2a) = \dfrac{2tan(a)}{1-tan^2(a)}$

Propriété

1. $\cos(a-b) = \cos a\cos b+\sin a\sin b$
2. $\sin(a-b) = \sin a\cos b-\cos a\sin b$
3. $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\times\tan b}$ $\qquad (a-b)\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{2};\quad k\in\mathbb{Z}\right\}$
4. $\cos(a+b) = \cos a\cos b-\sin a\sin b$
5. $\sin(a+b) = \sin a\cos b+\cos a\sin b$
6. $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\times\tan b}$ $\qquad (a+b)\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{2};\quad k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exemples

1 Montrons que $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$. En effet :

Dans le repère orthonormé on considère deux vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tel que $\left(\widehat{\vec{i},\vec{u}}\right)=a$ et $\left(\widehat{\vec{i},\vec{v}}\right)=b$.

D'une part $\vec{u}.\vec{v}=\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$ car les deux vecteurs sont unitaires.

D'autre part en se basant sur la relation de Chasles, on a :

$\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\left(\widehat{\vec{u},\vec{i}}\right)+\left(\widehat{\vec{i},\vec{v}}\right)=b-a$, donc $\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\cos(b-a)=\cos(a-b)\quad(1)$.

Les composantes des deux vecteurs sont : $\vec{u}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$.

Or $\vec{u}.\vec{v}=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)\qquad(2)$.

Finalement d'après (1) et (2) on obtient $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$

2 Remplacer b par $(-b)$ dans l'équation précédente.

$$\cos(a+b)=\cos(a-(-(b))=\cos(a)\cos(-b)+\sin(a)\sin(-b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$$

3 Il suffit de remplacer b par $\left(\frac{\pi}{2}-b\right)$ dans la deuxième formule. On aura alors :

$$\cos\left(a-\left(\frac{\pi}{2}-b\right)\right)=\cos\left(a-\frac{\pi}{2}+b\right)=\cos\left(a+b-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a+b)\right)=\sin(a+b)$$

D'autre part on a :

$$\cos\left(a-\left(\frac{\pi}{2}-b\right)\right)=\cos a\cos\left(\frac{\pi}{2}-b\right)+\sin a\sin\left(\frac{\pi}{2}-b\right)=\cos a\sin b+\sin a\cos b$$

D'où on obtient le résultat : $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

4

$$\begin{aligned}\sin(a-b)=\sin(a+(-b))=\cos a\sin(-b)+\sin a\cos(-b)&=-\cos a\sin b+\sin a\cos b\\&=\sin a\cos b-\cos a\sin b\end{aligned}$$

5 Soit $(a+b)\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2};\quad k\in\mathbb{Z}\right\}$.

$$\tan(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}=\frac{\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b}}{\frac{\cos a\cos b-\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}=\frac{\frac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b}+\frac{\cos a\sin b}{\cos a\cos b}}{\frac{\cos a\cos b}{\cos a\cos b}-\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\times\tan b}$$

6 Remplacer b par $(-b)$, on obtient :

$$\tan(a-b)=\tan(a+(-b))=\frac{\tan a+\tan(-b)}{1-\tan a\times\tan(-b)}=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\times\tan b}$$

2 Formules de duplication :

Propriété

1. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
2. $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$
3. $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$
4. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
5. $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$

Exemples

1.

$$\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos a\cos a - \sin a\sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

2. $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2(a) - \left(1-\cos^2(a)\right) = \cos^{(}a) - 1 + \cos^2(a) = 2\cos^2(a) - 1.$
3. $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = \left(1-\sin^2(a)\right) - \sin^2(a) = 1 - \sin^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a).$
4.

$$\sin(2a) = \sin(a+a) = \sin a\cos a + \cos a\sin a = 2\sin(a)\cos(a)$$

5.

$$\tan(2a) = \tan(a+a) = \frac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a \times \tan a} = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

II Transformation des produits aux sommes et des sommes aux produits

Activité

1. Calculer $\cos(a+b)+\cos(a-b)$, $\sin(a+b)+\sin(a-b)$ et $\cos(a+b)-\cos(a-b)$.
2. On pose $p = a+b$ et $q = a-b$.
   Vérifier que : $a = \dfrac{p+q}{2}$ et $b = \dfrac{p-q}{2}$
3. En déduire $\cos(p)+\cos(q)$, $\sin(p)+\sin(q)$, $\cos(p)-\cos(q)$ et $\sin(p)-\sin(q)$.

Propriété

Transformation des produits aux sommes :

1. $\cos(a).\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$
2. $\sin(a).\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$
3. $\sin(a).\sin(b) = -\frac{1}{2}(\cos(a+b)-\cos(a-b))$

Transformation des sommes aux produits :

1. $\cos(p)+\cos(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2}).\cos(\frac{p-q}{2})$
2. $\sin(p)+\sin(q) = 2\sin(\frac{p+q}{2}).\cos(\frac{p+q}{2})$
3. $\cos(p)-\cos(q) = -2\sin(\frac{p+q}{2}).\sin(\frac{p+q}{2})$
4. $\sin(p)-\sin(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2}).\sin(\frac{p+q}{2})$

1 Lien entre coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes :

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormal direct.

Propriété

Si M est un point ayant pour coordonnées cartésiennes $(x;y)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ et pour coordonnées polaires $(r;\theta)$ alors :

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\ ; \qquad x = r\cos\theta\ ; \qquad y = r\sin\theta$$

Exemples

Notons (U) le cercle trigonométrique de centre O. La demi-droite $[OM)$ coupe (U) en N.
On a donc $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{ON}$.
$N \in (U)$ donc ses coordonnées cartésiennes sont $(\cos\theta;\sin\theta)$. Celles de M sont donc $(r\cos\theta; r\sin\theta)$.
Par unicité des coordonnées, $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.
De plus $OM^2 = x^2+y^2$ et $OM = r$ donc $r^2 = x^2+y^2$. D'où :

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Application

1. Écrire les coordonnées polaires du point $A\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2 Écrire les coordonnées cartésiennes du point $B\left(2\sqrt{3}, \dfrac{5\pi}{6}\right)$.

Solution :

1 Écrivons les coordonnées polaires du point $A\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

En effet : $r = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1.$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ d'où $\theta \equiv \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$. Ainsi $A\left(1\ ,\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

2 Écrivons les coordonnées cartésiennes du point $B\left(2\sqrt{3}, \dfrac{5\pi}{6}\right)$.

En effet : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} \Longrightarrow x = r\cos\theta = 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \Longrightarrow y = r\sin\theta = 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -3 \end{cases}$.

Ainsi $B\left(\sqrt{3}\ ,\ -3\right)$.

2 Formules de transformation :

On veut transformer l'écriture suivante $a\cos x + b\sin x$ en $r\cos(x-\varphi)$ où r et φ à déterminer au fur et à mesure.

En effet, on sait que $\begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi \end{cases}$

D'où : $a\cos x + b\sin x = r\cos x\cos\varphi + r\sin x\sin\varphi = r(\cos x\cos\varphi + \sin x\sin\varphi) = r\cos(x-\varphi)$

T Théorème

$$a\cos x + b\sin x = r\cos(x-\varphi). \quad \text{où} \quad \begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi \end{cases}$$

Application

1 Transformer l'écriture $\sqrt{3}\cos x + \sin x$.

2 Transformer l'écriture $-\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{x}{3}\right) + \sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

Solution :

1 Transformons l'écriture $\sqrt{3}\cos x + \sin x$.

En effet $r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$; $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\varphi = \frac{\sqrt{1}}{2}$

D'où $\varphi \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$. Ainsi $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

2 Transformons l'écriture $-\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right)+\sin\left(\frac{x}{3}\right)$.

En effet $r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$; $\cos\varphi=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\varphi=\frac{\sqrt{1}}{2}$

D'où $\varphi\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$. Ainsi $-\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right)+\sin\left(\frac{x}{3}\right)=2\cos\left(\left(\frac{x}{3}\right)-\frac{5\pi}{6}\right)$

III Équations et inéquations trigonométriques

Propriété

1. Soit a et b deux réels :
   $\sin a=\sin b \Leftrightarrow (a=b+2k\pi \quad ;k\in\mathbb{Z}$ ou $a=\pi-b+2k\pi \quad ;k\in\mathbb{Z})$
2. Soit a et b deux réels :
   $\cos a=\cos b \Leftrightarrow (a=b+2k\pi \quad ;k\in\mathbb{Z}$ ou $a=-b+2k\pi \quad ;k\in\mathbb{Z})$
3. Soit a et b deux réels de $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$: $\tan a=\tan b \Leftrightarrow a=b+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$

Remarque

$$\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$$

Application

Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi[$ l'équation $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

Solution :

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k\times 2\pi \\ \text{ou} \\ x-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+k\times 2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi \\ \text{ou} \\ x=\frac{7\pi}{6}+k\times 2\pi \end{array}\right.$$

Sur l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi[$, on a $\mathscr{S}=\{\frac{\pi}{2};-\frac{5\pi}{6}\}$

IV L'équation : $a\cos x + b\sin x = c$

avec a, b et c des nombres réels $/(a,b) \neq (0,0)$
On a : $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ donc :
$a\cos x + b\sin x = c \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha) = c \Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}(1)$
On peut distinguer deux cas : On peut distinguer deux cas :
1er cas : $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \in \left]-\infty, -1[U]1, +\infty\right[$
dans ce cas l'équation (1) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$
2éme cas : $-1 \leq \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq 1$
donc il existe un réel β tel que $\cos\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ d'où : $(1) \Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = \cos\beta$ - $x-\alpha = \beta + 2k\pi$ ou $x-\alpha = -\beta + 2k\pi \Leftrightarrow x = \alpha + \beta + 2k\pi$ ou $x = \alpha - \beta + 2k\pi$ avec $k \in Z$

Application

Résoudre dans **R** les équations suivantes :

1. $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 3$
2. $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$

Solution

1. On a $(1) \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) = 3$ avec $\left(2 = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}\right)$ - $\cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$ $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$ et comme $\frac{3}{2} \notin [-1,1]$ donc l'équation (1) n'admet pas de solutions dans **R**
2. On a(2) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$ (2) $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) = 1$ e $\cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ Ou $x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in Z$ - $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in Z$