Chapitre

Calcul Trigonométrique

EXO 1BSM

I Série des exercices

Exercice

1. Vérifier que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$ et calculer $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$
2. Vérifier que $\frac{11\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ et calculer $\cos(\frac{11\pi}{12})$ et $\sin(\frac{11\pi}{12})$

Exercice

1. Réduire les expressions suivantes :

$$A(x) = \cos 7x.\sin 6x - \sin 7x.\cos 6x$$
$$B(x) = \cos x.\cos 2x - \sin x.\sin 2x$$
$$C(x) = \cos 3x.\sin 2x + \cos 2x.\sin 3x$$

2. Exprimer chacune des expressions suivantes en fonction de $\cos x$ et $\sin x$
   (a) $\sin(x - \frac{\pi}{3})$
   (b) $\sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$
   (c) $\sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$
3. x est un réel de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$.
   (a) Réduire l'écriture de l'expression : $\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x$
   (b) En déduire que : $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$.

Exercice

a et b sont deux réels de l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$ tels que : $\cos a = \frac{3}{5}$ et $\sin b = \frac{1}{2}$

1. Calculer $\sin a$ et $\cos b$.
2. Déduire $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

Exercice

a est un réel de l'intervalle $]0;\frac{\pi}{4}[$. Démontrer que $(\cos a+\sin a)^2 = 1+\sin 2a$.
$\frac{1+\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{\cos a+\sin a}{\cos a-\sin a}$.
Écrire $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

Exercice

1. (a) Vérifier que
$\sin x+\sqrt{3}\cos x = 2\sin(x+\frac{\pi}{3})$
(b) Déterminer α tel que
$\sin x-\cos x = \sqrt{2}\sin(x-\alpha)$
2. On considère l'équation
(E) :$\tan x = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$. Montrer que
$(E) \Leftrightarrow \sin(x-\frac{\pi}{4}) = \sin(s+\frac{\pi}{3})$
3. Résoudre dans $]0,2\pi[$ l'équation (E).

Exercice

Écrire les expressions suivantes en fonction de $t = \tan(\frac{x}{2})$:

1. $\frac{1-\cos x}{\sin x}$
2. $\frac{1-\sin x}{\cos x}$
3. $\frac{2\sin x+3\cos x}{\sin x+\cos x-1}$
4. $\cos x-\tan x$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\sin x-\cos x > -1$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sin x+2\sin 2x+sin3x = 0$
2. $\frac{1+\cos x}{1-\cos 2x} = 1$
3. $2\sin^2 x+\cos 4x-1 = 0$

4. $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$
5. $\tan x - cotan x = -2$.

Exercice

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1+\sqrt{u_n}}{2} \; ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$.

Exercice

Démontrer que, pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$: $\tan x = \dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}$. En déduire les valeurs exactes de $\tan\dfrac{\pi}{8}$ et $\tan\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice

ABC est un triangle non rectangle.

1. Démontrer que $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$.
2. Démontrer que $\tan(A+B) = -\tan C$.
3. En déduire la relation : $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \times \tan B \times \tan C$

Exercice

1. On considère le polynôme P définie par $P(x) = 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1$.
   a. Calculer $P(1)$.
   b. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.
2. a. Montrer que pour tout réel x on a :
      i. $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$;

ii. $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.

b Résoudre l'équation trigonométrique $4\cos^3(x) - 2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 = 0$ dans $]-\pi, \pi]$ et représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

3 En déduire des questions 1 et 2 les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Exercice

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$

1 Calculer : $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $f\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

2 Montrer que $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$. En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

3 Montrer que $f(x) = 2\sqrt{2}\cos(x)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$. En déduire que $\cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

4 Résoudre dans $]0; \pi]$ l'inéquation $f(x) \leq \frac{\sqrt{6}}{2}$

Exercice

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \sin(3x) + \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$.

2 a Montrer que $g(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \times \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

b Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$ l'inéquation $g(x) \leq 0$.

3 a Montrer que $2g(x) = 5\sin(x) - \sqrt{3}\cos(x) - 8\sin^3(x)$.

b Calculer $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$. En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

1 Montrer que $\tan^2(x) + \frac{1}{\tan^2(x)} = \frac{4}{\sin^{(}2x)} - 2$.

2 En déduire que $\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \tan^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 6$.

Exercice

1 Écrire les expressions suivantes en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$:

a $A(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos(\pi - x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin(\pi - x)$

b $B(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2(x)$

2 Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ en remarquant que $\frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\pi}{12}$

3 On se propose de résoudre l'équation trigonométrique :

$$(E) : \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$$

a Montrer que $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = A\sin(x + B)$ où A et B sont deux nombres réels à déterminer.

b Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E).

c Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'inéquation $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \sqrt{2}$.

Exercice

1 Démontrer que pour tout nombre réel a : $\cos(5a) = 16\cos^5(a) - 20\cos^3(a) + 5\cos(a)$

2 Vérifier que pour tout nombre réel x : $16x^5 - 20x^3 + 5x + 1 = (x+1)(4x^2 - 2x - 1)^2$

3 On pose $t = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Démontrer que le nombre réel t est solution de l'équation $4x^2 - 2x - 1 = 0$, puis que $t = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

4 En déduire $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Exercice

1. Montrer que pour tout nombre réel on a $\sin^6(x)+\cos^6(x)=1-\frac{3}{4}\sin^2(2x)$.
2. Résoudre dans $]-\pi;\pi[$ l'équation : $\sin^6(x)+\cos^6(x)=\frac{7}{16}$.
3. Placer les points images sur un cercle trigonométrique.
4. Soit x est un nombre réel tel que $x\neq\frac{k\pi}{2}$; $k\in\mathbb{Z}$
   - a. Calculer $\frac{\sin(3x)}{\sin(x)}-\frac{\cos(3x)}{\cos(x)}$.
   - b. Calculer $\cos(x)$ sachant que $\tan(x)=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ et $x\in\left]\frac{-\pi}{2};0\right[$.

Exercice

On considère l'équation : (E) : $\left(2\sin^2(x)+\sqrt{3}\sin(x)-3\right)\left(\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)-1\right)=0$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2t^2+\sqrt{3}t-3=0$.
   En déduire les solutions de l'équation $2\sin^2(x)+\sqrt{3}\sin(x)-3=0$
2. Déterminer deux nombres r et α tels que $\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)=r\cos(x+\alpha)$.
3. Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation (E).
4. Placer les images des solutions de l'équation (E) sur le cercle trigonométriques.