

Primitives

Les orientations pédagogiques 1	Capacités attendues
On déterminera les fonctions primitives des fonctions usuelles à partir de la lecture croisée du tableau des dérivées de ces fonctions.	<ul style="list-style-type: none"> • Déterminer les primitives des fonctions usuelles ; • Utiliser les formules de la dérivation pour calculer les primitives d'une fonction sur un intervalle.
Les prés-requis	Les extensions
Dérivation ; continuité	Équations différentielles ; intégral

Notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle

Activité

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + 3$

- 1 Déterminer une fonction F tel que $F'(x) = f(x)$
- 2 existe-t-il une fonction G tel que $G'(x) = f(x)$?
- 3 combien ya s'ils de fonction H tel que $H'(x) = f(x)$? donner une expression de toutes les fonctions primitives de f

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f admet une fonction primitive sur I s'il existe une fonction F dérivable sur I telle que : $(\forall x \in I) : F'(x) = f(x)$

Exemple

- 1 La fonction définie par : $x \mapsto F(x) = x^2$ est une fonction primitive de $x \mapsto f(x) = 2x$ sur \mathbb{R} car : $(\forall x \in \mathbb{R}) : F'(x) = f(x)$

- 2 La fonction définie par $x \mapsto F(x) = -\frac{1}{x^2} + 2024$ est une fonction primitive de $x \mapsto f(x) = \frac{2}{x^3}$ sur \mathbb{R} car : $(\forall x \in \mathbb{R}) : F'(x) = f(x)$

Remarque :

- ▶ En général, on note une primitive par une lettre majuscule.
- ▶ Pour montrer qu'une fonction F est une primitive de f sur un intervalle I , il suffit de montrer que : F est dérivable sur I et $(\forall x \in I) : F'(x) = f(x)$.

T Théorème

Si f est une fonction continue sur un intervalle I , alors elle admet des primitives sur I .

Conséquences directes du théorème :

- ▶ Toute fonction polynôme admet des primitives sur \mathbb{R} .
- ▶ Toute fonction rationnelle admet des primitives sur son ensemble de définition.

• Exemple

- 1 La fonction $f : x \mapsto 3x^2 - 2x + 4$ est continue \mathbb{R} , donc f admet des primitives sur \mathbb{R} .
- 2 La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{(5-x)^2}$ est continue sur $] -\infty; 5[$ et $]5; +\infty[$, donc f admet des primitives sur chacun des intervalles $] -\infty; 5[$ et $]5; +\infty[$.

II Les primitive d'une fonction continue

Propriété

Soit f une fonction continue sur in intervalle I . Si F est une primitive de la fonction f sur I alors toutes les fonctions primitives de f sont définie par : $x \mapsto F(x) + \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soit $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}$, il existe une seule primitive F de f sur I tel que $F(a) = b$.

Application

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = -\frac{1}{x^2} + 8x^3 - 11$

- 1 Montrer que la fonction définie par : $F(x) = \frac{1}{x} + 2x^4 - 11x$ est une fonction primitive de f sur $]0; +\infty[$.
- 2 Déterminer toutes les fonctions primitives de f sur $]0; +\infty[$
- 3 Déterminer la fonction primitive G de la fonction f tel que $G(1) = 3$.

 Les opérations sur les fonctions primitive

T

Théorème

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si F et G sont respectivement les primitives de f et g sur I alors la fonction $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I . La fonction λF est une primitive de λf sur I .

Remarque :

- ▶ Si F et G sont respectivement les primitives de f et g sur I alors la fonction $F \times G$ n'est pas une primitive de $f \times g$ sur I .
- ▶ $\frac{F}{G}$ n'est pas une primitive de $\frac{f}{g}$ sur I .

Propriété

Si f et g deux fonctions dérivable et leurs dérivées sont continue sur un intervalle I alors :

- 1 La fonction $f \cdot g$ est une primitive de $f'g + fg'$ sur I .
- 2 Si $(\forall x \in I) : g(x) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est une primitive de la fonction $\frac{f'g - fg'}{g^2}$ sur I .

IV Fonctions primitive des fonctions usuelles

La fonction f	La fonction primitive F	L'intervalle $I \subset D_F$
$x \mapsto 0$	$x \mapsto \lambda (\lambda \in \mathbb{R})$	\mathbb{R}
$x \mapsto a \quad (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto ax + \lambda (\lambda \in \mathbb{R})$	\mathbb{R}
$x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + \lambda$	\mathbb{R}
$x \mapsto x^r, \quad (r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$x \mapsto \frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1} + \lambda$	\mathbb{R}_+^*
$x \mapsto \cos(ax+b) \quad (a \in \mathbb{R}^*)$	$x \mapsto \frac{1}{a} \sin(ax+b) + \lambda (\lambda \in \mathbb{R})$	\mathbb{R}
$x \mapsto \sin(ax+b) \quad (a \in \mathbb{R}^*)$	$x \mapsto -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	\mathbb{R}
$x \mapsto 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x) + \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\} \quad (k \in \mathbb{Z})$
$x \mapsto f' \cdot g + f \cdot g'$	$x \mapsto f \cdot g + \lambda, (\lambda \in \mathbb{R})$	f et g deux fonctions dérivables sur I
$x \mapsto \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	$x \mapsto \frac{f}{g} + \lambda (\lambda \in \mathbb{R})$	f et g deux fets dériv sur I et $g \neq 0$ sur I
$x \mapsto f' \cdot f^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto \frac{1}{n+1} f^{n+1} + \lambda, \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	f est dérivable sur I
$x \mapsto f' \cdot f^r \quad (r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$x \mapsto \frac{1}{r+1} f^{r+1} + \lambda, (\lambda \in \mathbb{R})$	f est dérivable et str positive sur I
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + \lambda, (\lambda \in \mathbb{R})$	\mathbb{R}_+^*