Primitives

I Notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle

Activité

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 3$

1. Déterminer une fonction F tel que $F'(x) = f(x)$
2. existe-t-il une fonction G tel que $G'(x) = f(x)$?
3. combien ya s'ils de fonction H tel que $H'(x) = f(x)$? donner une expression de toutes les fonctions primitives de f

D Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f admet une fonction primitive sur I s'il existe une fonction F dérivable sur I telle que : $(\forall x \in I) : F'(x) = f(x)$

Exemple

1. La fonction définie par : $x \mapsto F(x) = x^2$ est une fonction primitive de $x \mapsto f(x) = 2x$ sur $\mathbb{R}$ car : $(\forall x \in \mathbb{R}) : F'(x) = f(x)$
2. La fonction définie par : $x \mapsto F(x) = -\frac{1}{x^2} + 2024$ est une fonction primitive de $x \mapsto f(x) = \frac{2}{x^3}$ sur $\mathbb{R}$ car : $(\forall x \in \mathbb{R}) : F'(x) = f(x)$

Remarque

- En général, on note une primitive par une lettre majuscule.
- Pour montrer qu'une fonction F est une primitive de f sur un intervalle I, il suffit de montrer que : F est dérivable sur I et $(\forall x \in I) : F'(x) = f(x)$.

T Théorème

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors elle admet des primitives sur I.

Conséquences directes du théorème :

- Toute fonction polynôme admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle admet des primitives sur son ensemble de définition.

Exemple

1. La fonction $f : x : x \mapsto 3x^2 - 2x + 4$ est continue $\mathbb{R}$, donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $f : x : x \mapsto \dfrac{1}{(5-x)^2}$ est continue sur $]-\infty;5[$ et $]5;+\infty[$, donc f admet des primitives sur chacun des intervalles $]-\infty;5[$ et $]5;+\infty[$.

II Les primitive d'une fonction continue

Propriété

Soit f une fonction continue sur in intervalle I. Si F est une primitive de la fonction f sur I alors toutes les fonctions primitives de f sont définie par : $x \mapsto F(x) + \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}$, il existe une seule primitive F de f sur I tel que $F(a) = b$.

Application

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = -\frac{1}{x^2} + 8x^3 - 11$

1. Montrer que la fonction définie par : $F(x) = \frac{1}{x} + 2x^4 - 11x$ est une fonction primitive de f sur $]0;+\infty[$.
2. Déterminer toutes les fonctions primitives de f sur $]0;+\infty[$
3. Déterminer la fonction primitive G de la fonction f tel que $G(1) = 3$.

III Les opérations sur les fonctions primitive

T **Théorème**

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si F et G sont respectivement les primitives de f et g sur I alors la fonction $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I. La fonction λF est une primitive de λf sur I.

Remarque

- Si F et G sont respectivement les primitives de f et g sur I alors la fonction $F \times G$ n'est pas une primitive de $f \times g$ sur I.
- $\dfrac{F}{G}$ n'est pas une primitive de $\dfrac{f}{g}$ sur I.

Propriété

Si f et g deux fonctions dérivable et leurs dérivées sont continue sur un intervalle I alors :

1. La fonction $f \cdot g$ est une primitive de $f'g + fg'$ sur I.
2. Si$(\forall x \in I) : g(x) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est une primitive de la fonction $\dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ sur I.

IV Fonctions primitive des fonctions usuelles

La fonction f	La fonction primitive F	L'intervalle $I \subset D_F$
$x \mapsto 0$	$x \mapsto \lambda(\lambda \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto a \quad (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto ax + \lambda(\lambda \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \, (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + \lambda$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^r, \quad (r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$x \mapsto \frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1} + \lambda$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \cos(ax+b) \quad (a \in \mathbb{R}^*)$	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b) + \lambda(\lambda \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(ax+b) \quad (a \in \mathbb{R}^*)$	$x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x) + \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} (k \in \mathbb{Z})$
$x \mapsto f' \cdot g + f \cdot g'$	$x \mapsto f \cdot g + \lambda, (\lambda \in \mathbb{R})$	f et g deux fonctions dérivables sur I
$x \mapsto \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	$x \mapsto \frac{f}{g} + \lambda(\lambda \in \mathbb{R})$	f et g deux fcts dériv sur I et $g \neq 0$ sur I
$x \mapsto f' \cdot f^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto \frac{1}{n+1} f^{n+1} + \lambda, \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	f est dérivable sur I
$x \mapsto f' \cdot f^r \, (r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$x \mapsto \frac{1}{r+1} f^{r+1} + \lambda, (\lambda \in \mathbb{R})$	f est dérivable et str positive sur I
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + \lambda, (\lambda \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_+^*$

1.Chapter 1 Primitives