Chapitre

Théorème de Pythagore

Cours 3AC

I Théorème de Pythagore direct

1 Activités

Activité

Soit ABC un triangle tel que : $AB = 3cm$, $AC = 4cm$ et $BC = 5cm$

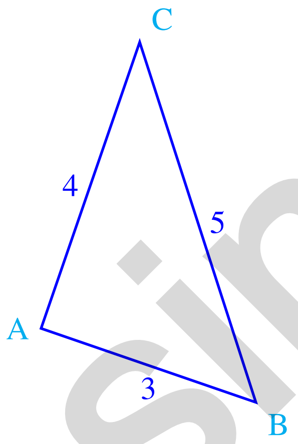
1 a Construire le triangle ABC

b Que remarquez-vous sur la nature du triangle ABC ?

2 Vérifier que $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Solution

1 a Consruisons une figure



b En utilisant l'équerre, on trouve que le triangle ABC est rectangle en A

2 On a : $AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ et $BC^2 = 5^2 = 25$

Donc : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

2 Théorème de Pythagore direct

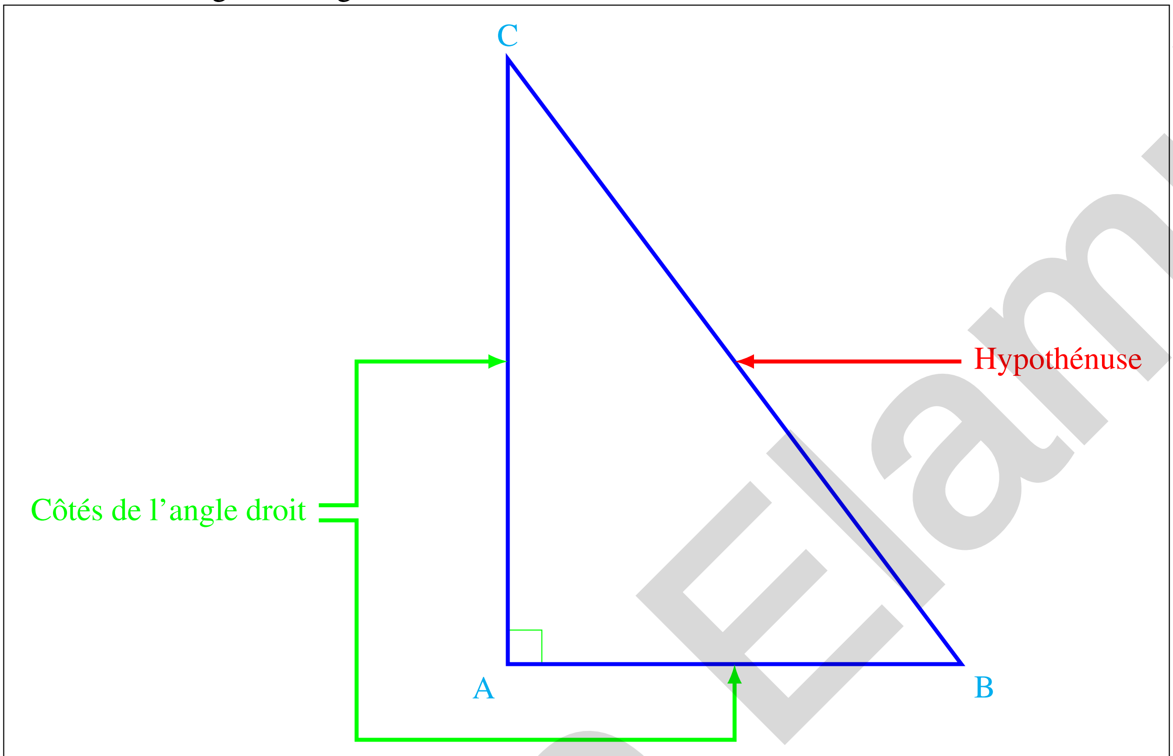
Proposition

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de son hypoténuse est égale à la somme des carrées des longueurs des côtés de l'angle droit

Autrement dit : Si ABC est un triangle rectangle en A, alors : $\boxed{AB^2 + AC^2 = BC^2}$

✿ Figure géométrique :

ABC est un triangle rectangle en A



Donc : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Remarque

- ✭ ABC est un triangle rectangle en A , donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$

  Alors : $\begin{cases} AB^2 = BC^2 - AC^2 \\ AC^2 = BC^2 - AB^2 \end{cases}$

- ✭ On utilise le théorème de Pythagore pour calculer les longueurs

• Exemple

Soit EFG un triangle rectangle en E tel que : $EF = 5$ et $EG = 3$
Calculer FG

Solution

On a EFG est un triangle rectangle en E,
Donc d'après le théorème de Pythagore direct, on a : $FG^2 = EF^2 + EG^2$
C'est à dire : $FG^2 = 5^2 + 3^2$
Donc : $FG^2 = 25 + 9$
Donc : $FG^2 = 34$
D'ou : $FG = \sqrt{34}$

Application

Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A, tel que : $AB = 4cm$
Soit M le milieu de $[BC]$

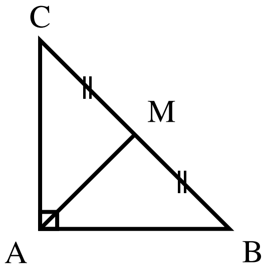
1 Consstuire une figure

2 Calculer BC

3 Déduire AM

Solution

1 Construisons une figure



2 Calculons BC

On a ABC est un triangle rectangle en A
Donc d'après le théorème de Pythagore direct, on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$
C'est à dire : $BC^2 = 4^2 + 4^2$, donc $BC^2 = 16 + 16$, donc $BC^2 = 32$
D'où : $BC = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = \sqrt{4^2} \times \sqrt{2}$
D'où : $BC = 4\sqrt{2}$

3 Déduisons AM (En utilisant le théorème de Pythagore)

On a ABC est un triangle isocèle en et M le milieu de $[BC]$
Donc (AM) est la médiatrice de $[BC]$
C'est à dire : $(AM) \perp (BC)$
Donc le triangle AMB est rectangle en M
M milieu de $[BC]$, donc $BM = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$
Le triangle AMB est rectangle en M, donc d'après le théorème de Pythagore direct, on a :
$AB^2 = AM^2 + BM^2$
C'est à dire : $4^2 = AM^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2$, donc $16 = AM^2 + 8$
Donc : $AM^2 = 16 - 8$, donc $AM^2 = 8$
Donc : $AM = \sqrt{8}$, d'où $AM = 2\sqrt{2}$

II Théorème réciproque de Pythagore

1 Activités

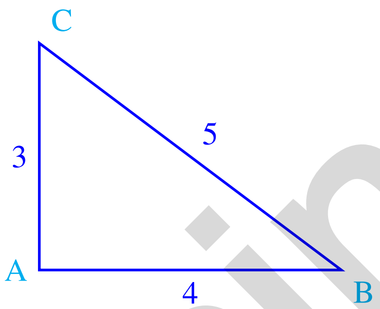
Activité

Soit ABC un triangle tel que : $AB = 4cm$, $AC = 3cm$ et $BC = 5cm$

1. Comparer BC^2 et $AB^2 + AC^2$
2. Construire le triangle ABC
3. Quelle est la nature du triangle ABC ?
4. Quelle est la propriété qu'on peut extraire ?

Solution

1. Comparons BC^2 et $AB^2 + AC^2$
On a : $AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ et $BC^2 = 5^2 = 25$
Donc : $AB^2 + AC^2 = BC^2$
2. Consruisons une figure



3. En utilisant l'équerre, on trouve que le triangle ABC est rectangle en A
4. On a trouvé que si ABC est un triangle qel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ABC est un triangle rectangle en A

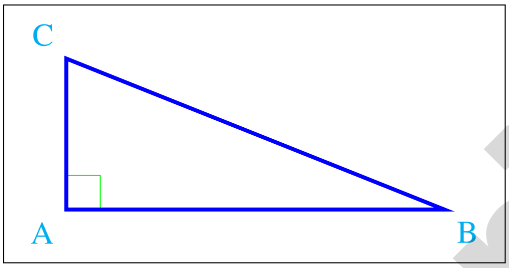
2 Théorème réciproque de Pythagore

Proposition

Dans un triangle, si le carré de la longueur du plus grand côté est égale à la somme des carrées des longueurs des côtés de l'angle droit, alors ce triangle est rectangle
<u>Autrement dit :</u> Si, dans un triangle ABC, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ce triangle est rectangle en A

✿ Figure géométrique :

ABC est un triangle tel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$
Alors ABC est un triangle rectangle en A



Remarque

✭ On utilise le théorème réciproque de Pythagore pour montrer qu'un triangle est rectangle (pour montrer la perpendicularité)

• Exemple

Soit EFG un triangle tel que : $EG = 6$, $FG = 8$ et $EF = 10$
Montrer que EFG est un triangle rectangle en G

Solution

On a : $\begin{cases} EG^2 = 6^2 = 36 \\ FG^2 = 8^2 = 64 \\ EF^2 = 10^2 = 100 \end{cases}$
Donc : $EG^2 + EG^2 = 36 + 64 = 100$
Alors : $EG^2 + EG^2 = EF^2$
Donc, d'après le théorème réciproque de Pythagore, le triangle EFG est rectangle en G

Application

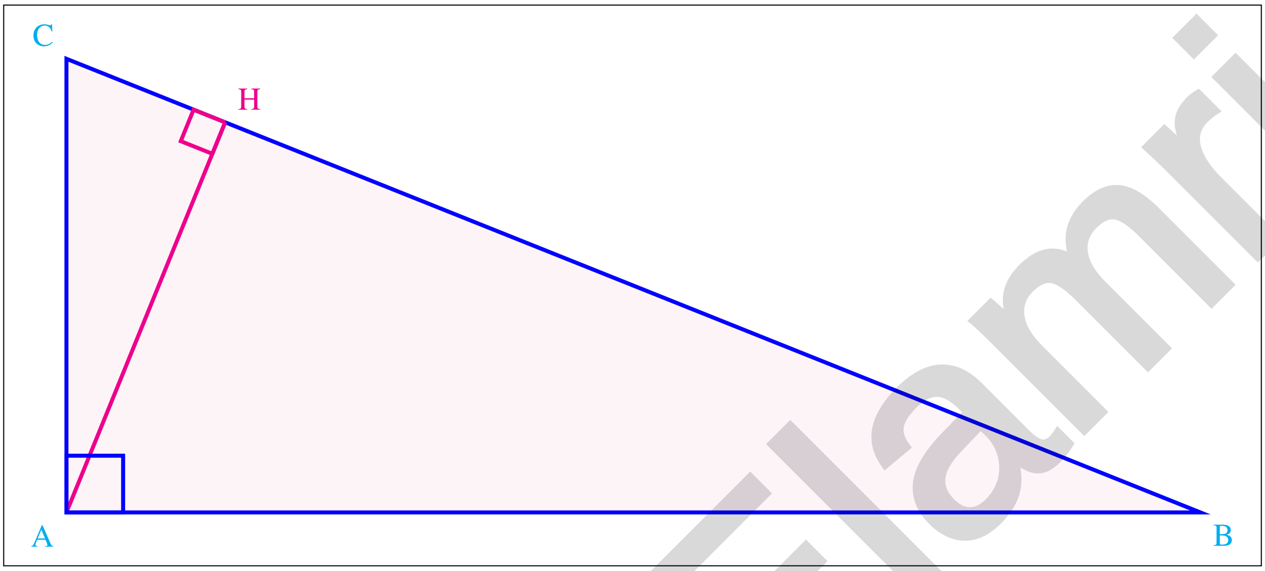
Soit ABC un triangle tel que : $AB = 2\sqrt{2}cm$, $AC = \sqrt{3}$ et $BC = \sqrt{5}$
Montrer que ABC est rectangle

Solution

On a : $\begin{cases} AB^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8 \\ AC^2 = \sqrt{3}^2 = 3 \\ BC^2 = \sqrt{5}^2 = 5 \end{cases}$
On a : $AC^2 + BC^2 = 3 + 5 = 8$
Donc : $AC^2 + BC^2 = AB^2$
Donc, d'après le théorème réciproque de Pythagore, ABC est un triangle rectangle en C

❏ PARAGRAPHE SUPPLÉMENTAIRE : *Les relations métriques*

ABC est un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal du point A sur (BC)



- ✪ $AB \times AC = AH \times BC$
- ✪ $AB^2 = BH \times BC$
- ✪ $AC^2 = CH \times BC$
- ✪ $AH^2 = BH \times CH$