Chapitre

Ordre dans $\mathbb{R}$

Fiche pédagogique N5 : Ordre dans $\mathbb{R}$

Masse horaire : 7h

- Ordre et opérations
- Les intervalles
- Valeur approcher
- Approximation
- Série d'exercices

Les orientations pédagogiques

1. On devra développer et consolider l'habilité d'utilisation de l'ordre pour comparer des nombres et pour prouver certaines relations.
2. On devra entrainer les élèves à interpréter des relations de la forme $x \in \mathbb{R}$ et à majorer des expressions en utilisant l'inégalité triangulaire et les propriétés de la valeur absolue. Les élèves seront amenés à utiliser ces techniques fondamentales de manière progressive.
3. La notion de la valeur absolue devra être liée à la distance de deux points sur la droite graduée.
4. Les propriétés de l'encadrement et de l'approximation d'une somme et d'une différence de deux nombres peuvent être présentées dans le cas général, mais l'encadrement et l'approximation d'un produit et d'un quotient, devront être étudiés à partir d'exemples numériques bien choisis pour montrer aux élèves le précautions à prendre et les conditions à respecter, pour faire des raisonnements corrects.
5. La calculatrice est un outil qui pourra aider dans l'approche des notions précédentes (approximation et l'encadrement), on devra s'assurer que les élèves maitrisent l'écriture scientifique d'un nombre et qu'ils sont conscients des limites de l'usage de la calculatrice qui donne en général une valeur approchée décimale du résultat.

Les capacités attendues

1. Maitriser les différentes techniques de comparaison de deux nombres (ou expressions)et utiliser la technique convenable selon la situation étudiée.
2. Représenter sur la droite numérique les différentes relations liées à l'ordre.
3. Reconnaitre et déterminer avec une précision donnée, une approximation d'un nombre (ou d'une expression).
4. Effectuer des majorations ou des minorations d'expressions algébriques.
5. Utiliser la calculatrice pour déterminer des valeurs approchées d'un nombre réel.

Les prés requis

1. Les opérations mathématiques
2. Les nombres entiers naturels
3. Comparaison des nombres

Les extensions

1. Les Fonctions et les Suites Numériques ;
2. Intégration Dérivations Limites ;
3. Nombres complexes Espaces vectoriels Corps commutatifs
4. Physique et Mécanique ;

Introduction

Valeur absolue En mathématiques, la valeur absolue (parfois appelée module, c'est-à-dire mesure) d'un nombre réel est sa valeur numérique considérée sans tenir compte de son signe. On peut la comprendre comme sa distance à zéro ; ou comme sa valeur quantitative, à laquelle le signe ajoute une idée de polarité ou de sens (comme le sens d'un vecteur). Par exemple, la valeur absolue de -2 est 2, et celle de $+2$ est 2. La valeur absolue se note par des barres verticales : ainsi, on écrit : $|-2| = |+2| = 2$. En programmation informatique, l'identificateur utilisé pour désigner la valeur absolue est usuellement abs. Il existe de nombreuses généralisations de la valeur absolue dans des espaces plus abstraits (nombres complexes, espaces vectoriels, corps commutatifs . Cette notion est proche de celles de distance et de magnitude dans de nombreuses branches de la physique et des mathématiques.

Historique

Il y a eu quatre étapes dans l'évolution de la notion de valeur absolue. Durant la première, sa définition était le "nombre sans son signe" ou la "distance à partir de zéro". Cette définition était implicite, car il n'y avait pas eu de définition formelle. Dans la deuxième étape, la valeur absolue était devenue une fonction, souvent utilisée dans le calcul d'erreurs. Un sens plus exact des applications de la valeur absolue à cette époque était "prendre positivement" un nombre ou "faire abstraction des signes". La troisième étape a découlé de la compréhension du nombre en tant que concept abstrait. La valeur absolue devint un concept spécifique défini pour chaque nombre, en plus de la méthode pour mesurer des nombres complexes. En 1821, Cauchy popularise son utilisation dans l'analyse formelle. À ce moment, il manquait une notation. La quatrième et dernière étape découle de sa propre formalisation. Ceci était nécessaire pour l'évolution de l'analyse complexe. Napier aurait utilisé les valeurs absolues dans l'élaboration des tables logarithmiques, alors que Descartes et Newton les auraient utilisées pour une théorie générale des équations polynomiales. Lagrange et Gauss utilisaient la valeur absolue dans la théorie des nombres pour résoudre des équations de calcul d'erreurs. Argand et Cauchy l'utilisaient pour mesurer la distance entre nombres complexes, et Cauchy l'a souvent utilisée dans l'analyse. Valeur absolue d'un nombre réel Un nombre réel est constitué de deux parties : un signe $+$ ou $-$ et une valeur absolue. Par exemple :

1. $+7$ est constitué du signe $+$ et de la valeur absolue 7.
2. -5 est constitué du signe $-$ et de la valeur absolue 5.

Ainsi, la valeur absolue de $+7$ est 7, et la valeur absolue de -5 est 5. Il est fréquent de ne pas écrire le signe $+$, on obtient alors :

1. la valeur absolue de 7 est 7.
2. la valeur absolue de -5 est 5, c'est-à-dire l'opposé de -5.

Test des connaissances des pré requis

	Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3
Le nombre $\frac{11}{7}$ est :	inférieur à 1	supérieur à 1	égal à 1
Le nombre $\frac{121}{212}$ est :	inférieur à 1	supérieur à 1	égal à 1
Le nombre $\frac{\sqrt{144}}{12}$ est :	inférieur à 1	supérieur à 1	égal à 1
Si $x < 2$ alors :	x est négatif	x est positif	on ne peut conclure
Si $x < 7$ alors :	$x < -5$	$x > 2$	x est négatif
Si $x \geq 0$ alors :	x est strictement positif	$x > -5$	$x > 1$
$\frac{3}{7} \dots \frac{5}{7}$	$<$	$>$	$=$
$-10 \dots -15$	$<$	$>$	$\neq$
$\left(1-\frac{3}{2}\right) \dots \left(1-\frac{5}{7}\right)$	$<$	$>$	$=$

I Ordre et opérations

1 Comparaison de deux nombres

Activité

a et b de l'ensemble $\mathbb{R}$:

1. Trouver une comparaison entre a et b pour les cas suivants :
   a. $(b-a) \in \mathbb{R}^+$ puis $(a-b) \in \mathbb{R}^+$.
   b. $(b-a) \in \mathbb{R}^{*+}$ puis $(a-b) \in \mathbb{R}^{*-}$.
2. Donner les définitions.

Définition

Soient a et b deux nombres réels. Comparer a et b revient à étudier le signe de $(a-b)$, donc on dit que a est inférieur ou égal à b et on écrit $a \leq b$ si et seulement si $a-b \leq 0$ $((a-b) \in \mathbb{R}^-)$

Propriété

Soient a, b, c et d des nombres réels.

1. Si $a \leq b$ alors $a+c \leq b+c$.
2. Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a+c \leq b+d$.
3. Si $a \leq b$ et $c > 0$ alors $ac \leq bc$.
4. Si $a \leq b$ et $c < 0$ alors $ac \geq bc$.

Propriété

Soient a, b, c et d des nombres réels positifs.

1. Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $ac \leq bd$.
2. Si $a \leq b$ alors $a^2 \leq b^2$ et $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.
3. $a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

Remarque

Soient a, b, c et d des nombres réels négatifs.

1. Si $a \leq b$ alors $a^2 \geq b^2$.
2. Si $a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

Application

Comparer a et b dans les cas suivants :

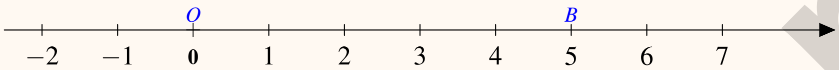
- $a = \frac{6}{17}$ et $b = \frac{7}{15}$

- $a = \sqrt{3} - 1$ et $b = \frac{1}{\sqrt{3}+1}$
- $a = \frac{n-1}{n}$ et $b = \frac{2n}{n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

2 Encadrement

Activité

Soit une droite graduée d'origine O et d'unité de mesure OB :



1. Construire les points I, J et H d'abscisse 2, -1 et 7.
2. Donner les distances suivantes : OI, OJ et OH.

Définition

Soit x un nombre réel.
Encadrer le nombre x revient à trouver deux nombres réels a et b tels que $a \leq x \leq b$ ou $a < x \leq b$ ou $a \leq x < b$ ou $a < x < b$.
Le nombre $b - a$ est l'amplitude de cet encadrement.

Propriété

Soient a, b, c et d des nombres réels.

1. Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ alors $a + c \leq x + y \leq b + d$.
2. Si $a \leq x \leq b$ alors $-b \leq -x \leq -a$.
3. Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ alors $a - d \leq x - y \leq b - c$.

Propriété

Soient a, b, c et d des nombres réels positifs.

1. Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ alors $ac \leq xy \leq bd$.
2. Si $a \leq x \leq b$ et $ab \neq 0$ alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$.

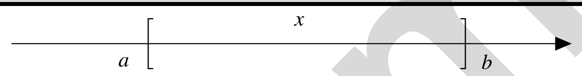
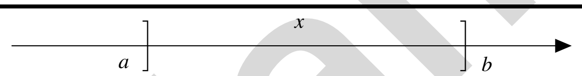
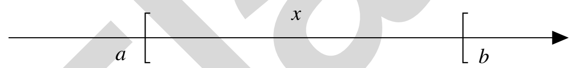
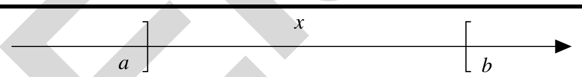
Application

1. Vérifier que $14^2 < 200 < 15^2$ et en déduire que : $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$.
2. Trouver un encadrement de : $\sqrt{5}$.
3. En déduire un encadrement de : $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ et $\sqrt{10}$.

II Les intervalles

1 Les intervalles bornés

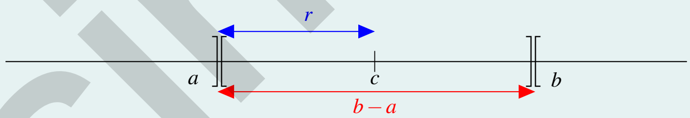
Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

L'encadrement	L'intervalle correspondant	Représentation sur la droite numérique
$a \leq x \leq b$	$x \in [a, b]$	
$a < x \leq b$	$x \in]a, b]$	
$a \leq x < b$	$x \in [a, b[$	
$a < x < b$	$x \in]a, b[$	

Définition

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$.

1. Le centre d'un intervalle dont les extrémités sont a et b est $c = \frac{a+b}{2}$.
2. Le rayon d'un intervalle dont les extrémités sont a et b est $r = \frac{b-a}{2}$.



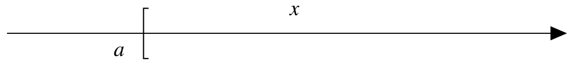
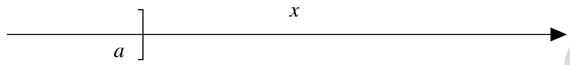
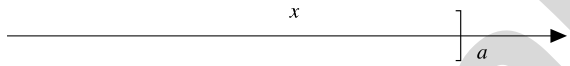
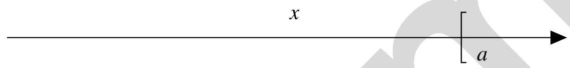
Exemple

Soit $I = [-5, 3]$.

1. L'amplitude de l'intervalle I est $3 - (-5) = 8$.
2. Le centre de l'intervalle I est $\frac{3+(-5)}{2} = -1$.
3. Le rayon de l'intervalle I est $\frac{3-(-5)}{2} = 4$.

2 Les intervalles non bornés

Soient a un nombre réel.

L'inégalité	L'intervalle correspondant	Représentation sur la droite numérique
$x \leq a$	$x \in]-\infty, a]$	
$x < a$	$x \in]-\infty, a[$	
$a \leq x$	$x \in [a, +\infty[$	
$a < x$	$x \in]a, +\infty[$	

Remarque

- $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$
- $\mathbb{R}^*_+ =]0, +\infty[$
- $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$
- $\mathbb{R}^*_- =]-\infty, 0[$
- $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

3 Intersection et réunion de deux intervalles

Définition

Soient I et J deux intervalles.

1. L'intersection des deux intervalles I et J est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à I et à J, qu'on note $I \cap J$
2. La réunion des deux intervalles I et J est l'ensemble des éléments appartenant à I ou à J, qu'on note $I \cup J$

Exemple

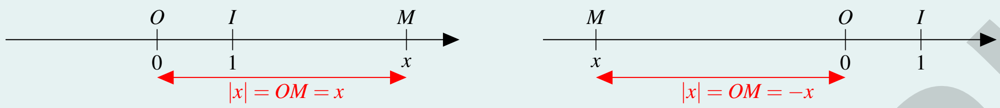
1. Si $I = [-2, 5[$ et $J = [-3, 3]$ alors $I \cap J = [-2, 3]$ et $I \cup J = [-3, 5[$
2. Si $I = [1, 4]$ et $J = [-2, 0]$ alors $I \cap J = \emptyset$ et $I \cup J = [-2, 0] \cup [1, 4]$

III Valeur absolu

Définition

Soit x un nombre réel et M le point d'abscisse x sur un axe gradué $D(O;I)$. La valeur absolu de nombre réel x est la distance OM, noté $|x|$. Et on a :

- Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$
- Si $x < 0$, alors $|x| = -x$



Remarque

Soit x un nombre réel. Alors on a

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Exemple

$$|-3| = 3 \ ; \ |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3} \ ; \ |3-\sqrt{11}| = -(3-\sqrt{11}) = \sqrt{11}-1.$$

Propriété

Sient x et y deux nombres réels.

- $|x| \geq 0$
- $|-x| = |x|$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $|x|^2 = |x^2| = x^2$
- $|xy| = |x|.|y|$
- $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$

Théorème

Soient x et r deux réels tels que $r \geq 0$.

1. $|x| \leq r$ si et seulement si $-r \leq x \leq r$.
2. $|x| < r$ si et seulement si $-r < x < r$.
3. $|x| > r$ si et seulement si $x > r$ ou $x < -r$.

IV Approximation

1 Valeur approchée

Définition

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Tout nombre réel a qui vérifier $|x-a| \leq r$ est appelé valeur approchée (ou approximation) du nombre x à r prés (ou à la précision r).

Exemple

On a $|\sqrt{3}-1.73| \leq 0.003$. Donc 1.73 est une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à la précision $0.003 = 3 \times 10^{-3}$.

2 Approximation par défaut et par excès

Définition

Si $a \leq x \leq b$ (ou $a < x \leq b$ ou $a \leq x < b$ ou $a < x < b$). Alors :

1. a est une valeur approchée de x à $(b-a)$ près par défaut.
2. b est une valeur approchée de x à $(b-a)$ près par excès.

Exemple

On a $2.6457 \leq \sqrt{7} \leq 2.6458$.
Donc $b-a = 2.6458 - 2.6457 = 0.0001 = 10^{-4}$. D'où

1. 2.6457 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-4} près par défaut.
2. 2.6458 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-4} près par excès.

3 Approximation décimale

Définition

Soit x un réel tel que $p \times 10^{-n} \leq x \leq (p+1) \times 10^{-n}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $\in \mathbb{N}$.

1. $p \times 10^{-n}$ est appelé l'approximation de réel x à 10^{-n} près par défaut.
2. $(p+1) \times 10^{-n}$ est appelé l'approximation de réel x à 10^{-n} près par excès.

Exemple

On a $3.14 \leq \pi \leq 3.15$ donc $314 \times 10^{-2} \leq \pi \leq 315 \times 10^{-2}$. Donc :

1. 314×10^{-2} est appelé l'approximation de réel π à 10^{-2} près par défaut.
2. 315×10^{-2} est appelé l'approximation de réel π à 10^{-2} près par excès.