



Primitives d'une fonction numérique :

D

Définition

Une fonction F est une primitive d'une fonction f définie sur un intervalle I si : $\forall x \in I ; F'(x) = f(x)$

Exemple

- ♣ Fonction primitive de la fonction $f(x) = 4x + 2$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \mapsto x^2 + 3x$
- ♣ Fonction primitive de la fonction $f(x) = \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \mapsto \sin(x)$

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une fonction primitive sur I .

Propriété

F est une primitive d'une fonction f définie sur un intervalle I .
Toute fonction primitive G de f sur I est de la forme $G(x) = F(x) + c ; (c \in \mathbb{R})$

Exemple

Les fonctions primitives de la fonction $f(x) = 4x + 2$ sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $F(x) = x^2 + 3x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Propriété

F est une primitive d'une fonction f définie sur un intervalle I , $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$; il existe une seule fonction primitive G de f qui vérifie la condition $G(x_0) = y_0$

Exemple

Déterminer la fonction primitive de $f(x) = x^3 - 2x + 3$ qui prend la valeur 0 en -1

Les primitives de f sont de la forme $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 3x + c ; c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{Puisque } F(-1) = 0 &\iff \frac{1}{4}(-1)^4 - (-1)^2 + 3 \times (-1) + c = 0 \\ &\iff \frac{1}{4} - 4 + c = 0 \\ &\iff c = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

conclusion :

La fonction primitives de $f(x) = x^3 - 2x + 3$ qui prend la valeur 0 en -1 est : $G(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 3x + \frac{15}{4}$

II Fonctions primitives de la somme de deux fonction - le produit d'une fonction par un réel α

Propriété

F et G sont les primitives respectivement de f et g sur I , on a :

- ♣ $F + G$ est une primitive de $f + g$.
- ♣ αF est une primitive de αf .

Exemple

Soient $f(x) = 3x$ et $g(x) = \cos(x)$, leurs fonctions primitives sont respectivement $F(x) = 6x^2 + c$ et $G(x) = \sin(x) + c'$ avec c et $c' \in \mathbb{R}$

III Opérations sur les fonctions primitives - Tableau des fonctions primitives des fonctions usuelles

1 Opérations sur les fonctions primitives

Fonction h	H primitive de h
$f' + g'$	$f + g$
$\alpha f'$	αf
$f' \times g + f \times g'$	$f \times g$
$-\frac{g'}{g^2}$	$\frac{1}{g}$
$\frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	$\frac{f}{g}$
$f' \times f^n ; n \neq -1$	$\frac{1}{n+1} f^{n+1}$
$f' \times g' \circ f$	$g \circ f$
$f'(ax + b) ; a \neq 0$	$\frac{1}{a} f(ax + b)$

2 Tableau des fonctions primitives des fonctions usuelles

Fonction f	F primitive de f ($c \in \mathbb{R}$)
$f(x) = 0$	$F(x) = c$
$f(x) = a ; a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax + c$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$
$f(x) = x^n ; n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$f(x) = x^r ; r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + c$
$f(x) = \sin(ax+b) ; a \neq 0$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + c$
$f(x) = \cos(ax+b) ; a \neq 0$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$
$f(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$F(x) = \tan(x) + c$
$f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$F(x) = 2\sqrt{u(x)} + c$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + c$