Chapitre

Limite d'une suite numérique

I Suites numériques

1 Généralités sur les suites

a suite majoré, suite minoré, suite bornée

Soit n_0 un entier naturel et l'intervalle $I = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq n_0\}$

D Définition

- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est majorée s'il existe un réel M tel que : $(\forall n \in I) \quad u_n \leq M$.
- - On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est minorée s'il existe un réel m tel que : $(\forall n \in I) \quad u_n \geq m$.
- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée..

b Monotonie d'une suite

D Définition

- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante si :$(\forall n \in I) \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$
- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante si :$(\forall n \in I) \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$.
- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est constante si : $(\forall n \in I) \quad u_{n+1} = u_n$

2 3 suite arithmétique, somme d'une suite géométrique

D Définition

On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est arithmétique s'il existe un réel r (indépendant de n) tel que :

$$(\forall n \in I) \quad u_{n+1} - u_n = r$$

Le nombre r est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Proposition

Somme d'une suite numérique :

Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout $(n;p)\in I^2$:

$$u_n = u_p + (n-p)r \quad \text{et} \quad u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p+u_n)$$

Exemple

La suite $(U_n)_{\forall n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_n = \dfrac{2n}{3}+3$ est une suite arithmétique,car $U_{n+1}-U_n = \dfrac{2(n+1)}{3}+3-\left(\dfrac{2n}{3}+3\right) = \dfrac{2}{3}$.La somme de cette suite est :

$$S = U_0+U_1+\ldots\ldots U_n = \frac{(U_0+U_n)}{2}\times(n+1) = \left(\frac{2n+6}{3}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

Application

Soit (u_n) une suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n\in\mathbb{N}); u_{n+1} = \dfrac{4u_n-1}{4u_n} \end{cases}$

1. Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}); u_n > \dfrac{1}{2}$.
2. Montrer que $u_{n+1}-u_n = \dfrac{-(2u_n-1)^2}{4u_n}$.
3. Déduire que (u_n) est décroissante et que $(\forall n\in\mathbb{N}); u_n \leq 1$.
4. Soit (v_n) une suite définie par $(\forall n\in\mathbb{N}); v_n = \dfrac{3}{2u_n-1}$.
   a. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r=3$, puis calculer v_0.
   b. Déterminer v_n en fonction de n puis déduire $(\forall n\in\mathbb{N}); u_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$.
5. Calculer $S = v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{20}$.

a Suite géométrique, somme d'une suite géométrique

D Définition

Une suite géométrique (U_n) est définie par :

- un premier terme u_0 ou u_p.

- Une relation de récurrence $u_{n+1} = q\times u_n$, q étant que la raison de la suite u_n.

Proposition

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite numérique . q est un nombre réel non nul . Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0} Pour la somme suivante :

$$S_n = \sum_{\substack{i=n\\i=n}} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_n \text{ ou a :}$$

$$\Rightarrow \text{ Si } q \neq 1 \text{ on a } S_n = \left[\frac{q^{(n-p+1)} - 1}{q-1}\right] \times u_p.$$

$$\Rightarrow \text{Si} q = 1 : S = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p(n-p+1).$$

$\star$ Propriété caractéristique : $\forall \mathrm{p} \geq \mathbf{n}_0; \forall \mathbf{q} \geq \mathbf{n}_0 : \mathrm{u}_{\mathbf{q}} = \mathrm{u}_\mathrm{p} \times \mathrm{q}^{\mathrm{q}-\mathbf{p}}$ (avec q et **p** de $\mathbb{N}$).

Exemple

Soit (u_n) une suite définie par : $u_n = 3^{n+1}$, Alors (u_n) est une suite géométrique car $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3^{n+2}}{3^{n+1}} = 3$ donc $u_{n+1} = 3 \times u_n$. La somme de cette suite géométrique est :

$$S = u_0 + u_1 + \ldots\ldots\ldots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-3^{n+1}}{1-3}$$

Application

Soit (u_n) une suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3-2u_n} \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < 1$
   a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n(u_n - 1)}{3-2u_n}$
   b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. on considère la suite (v_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$
   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$ puis calculer v_0
   b. Exprimer v_n en fonction de n
   c. Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \dfrac{1}{1+3^n}$

4 on pose $(\forall n\in\mathbb{N}^*);S_n=v_0+v_1+\cdots\cdots+v_{n-1}$ Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);S_n=\dfrac{-3}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$

3 Limite d'une suite numérique

a Limite finie d'une suite numérique

Activité

1 Compléter le tableau suivant :

n	1	10	10^3	10^5	10^7	10^9	10^{11}
n^2							
$\sqrt{n}$							
$\frac{1}{n}$							
$\frac{1}{n^2}$							
$\frac{1}{n}+2$							

2 Que concluez-vous lorsque l'entier naturel n prend des valeurs de plus en plus grands

3 Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} n \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} n^3 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} n^p, p\geq 4 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}};\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}$$

b Limite finie d'une suite numérique

D **Définition**

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique et l un nombre réel. On dit que la suite (u_n) tend vers l quand n tend vers $+\infty$ si, pour tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.et on écrite $\lim_{n\to+\infty} u_n=l$

Proposition

Soit p $\in\mathbb{N}$ et $p\geq 4$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \quad ; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0 \quad ; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^p}=0, p\geq 4$$

Exemple

✓ On a : $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 2 + \dfrac{1}{n^2}$ puisque $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ alors $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+1}{n^2} = 2$

✓ On a : $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3-n}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{n^4} - \dfrac{n}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^3}$ puisque $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ alors $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3-n}{n^4} = 0$

Remarque

Si une suite admet une limite finie, alors cette limite est unique.

c Limite infinie d'une suite numérique

D Définition

On dit qu'une suite tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A,+\infty[$ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux (c.-à-d. contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang). Cette définition se traduit formellement par :

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Rightarrow u_n > A).$$

On écrit alors

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ ou plus simplement, quand il n'y a pas ambiguïté, $\lim u = +\infty$ ou $u \to +\infty$.

On dit qu'une suite tend vers $-\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux. Cette définition se traduit formellement par :

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Rightarrow u_n < A).$$

On écrit alors $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$ ou plus simplement, quand il n'y a pas ambiguïté $\lim u = -\infty$ ou $u \to -\infty$

Proposition

Soit p $\in \mathbb{N}$ et $p \geq 4$

$$\lim_{n\to\infty} n=+\infty;\ \lim_{n\to\infty} n^2=+\infty;\ \lim_{n\to\infty} n^3=+\infty;\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty;\ \lim_{n\to+\infty} n^p=+\infty, p\geq 4$$

Exemple

✓ On a : $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty} n+\frac{1}{n^2}$ puisque $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ et $\lim_{n\to\infty} n=+\infty$ alors $\lim_{n\to\infty} n+\frac{1}{n^2}=+\infty$✓ On a : $\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}+5n^4+6}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}+5n^3+\frac{6}{n}=+\infty$ car $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ et $\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n}=0$ et $\lim_{n\to\infty} 5n^3=+\infty$

Application

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

1. $u_n=2n^3-3n^2+4n$
2. $u_n=n^2-5\sqrt{n}$
3. $u_n=\dfrac{3n^3+2n+4}{n-3}$
4. $u_n=\dfrac{1-n}{\sqrt{n}+1}$
5. $u_n=\sqrt{n+1}-2n$
6. $u_n=\sqrt{3n^2+4}-n$
7. $u_n=\sqrt{n}$
8. $2n+1$

d Limite d'une suite géométrique (q^n où $q\in\mathbf{R}$)

Proposition

Soit q un nombre réel.

◇Si $-1<q<1$ Alors $\lim_{n\to\infty} q^n=0$.

◇ Si $q>1$ Alors $\lim_{n\longrightarrow\infty} q^n=\infty$.

◇ Si $q=1$ Alors $\lim_{n\longrightarrow\infty} q^n=1$.

Exemple

$$\leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0\ (car -1 < \frac{1}{2})^n < 1);\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{5}\right)^n = +\infty(car\frac{6}{5})^n >)$$

Application

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{1}{4^n}; u_n = \frac{2^n+3^n}{5^n}; u_n = (\pi-3)^n.$$

e Critères de convergence d'une suite numérique

D Définition

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique.

-On dit qu'une suite numérique $(u_n)_n$ est **convergente** si elle admet une limite finie.

- On dit qu'une suite numérique $(u_n)_n$ est '**divergente** si elle n'admet pas une limite finie.

Exemple

○ La suite définie par $u_n = \frac{1}{n^2}$ est convergente car :$lim_{n\longrightarrow\infty}u_n = 0$.

○ La suite définie par $v_n = n^3$ est divergente car :$lim_{n\longrightarrow\infty}v_n = +\infty$.

T Théorème

$*$ Toute suite croissante et majoré est convergente.

$*$ Toute suite décroissante et minoré est convergente.

Ce théorème est dite théorème de la convergence monotone.

Remarque

Ce théorème assure la convergence d'une suite mais ne détermine pas sa limite.

Exemple

1)-On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \le u_n \le 2$

- Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$; donc : $0 \le u_0 \le 2$.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leq u_n \leq 2$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.

On a : $0 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow 2 \leq 2+u_n \leq 4 \Rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{2+u_n} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 2$

- Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 2$ Étudions maintenant la monotonie de la suite (u_n) : On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{2+u_n}-u_n=\frac{2+u_n-u_n^2}{\sqrt{2+u_n}+u_n}=\frac{(u_n+1)(2-u_n)}{\sqrt{2+u_n}+u_n}$$

Comme $0 \leq u_n \leq 2$ alors $\dfrac{(u_n+1)(2-u_n)}{\sqrt{2+u_n}+u_n} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $u_{n+1}-u_n \geq 0$.
Ainsi, la suite (u_n) est croissante majorée par 2 , donc elle est convergente.
2) On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0=\dfrac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+1}{2u_n}$.
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n > 1$

-Initialisation : Pour $n=0$, on a $u_0=\dfrac{3}{2}$; donc $u_0 > 1$.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n > 1$ et montrons que $u_{n+1} > 1$. On a : $u_{n+1}-1=\dfrac{u_n^2+1}{2u_n}-1=\dfrac{(u_n-1)^2}{2u_n}$. Comme $u_n > 1$, alors $\dfrac{(u_n-1)^2}{2u_n} > 0$; d'où : $u_{n+1} > 1$.
- Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n > 1$

Étudions maintenant la monotonie de la suite (u_n) :

On a pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n^2+1}{2u_n}-u_n=\dfrac{1-u_n^2}{2u_n}$. Puisque $u_n > 1$, alors $u_n^2 > 1$. Donc : $\dfrac{1-u_n^2}{2u_n} < 0$, c'est-à-dire : $u_{n+1}-u_n < 0$. Ainsi, la suite (u_n) est décroissante. De plus, elle est minorée par 1, donc elle est convergente.

Proposition

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites tel que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq n_0$.

$\star$ Si $lim_{n\longrightarrow\infty}u_n=+\infty$ Alors $lim_{n\longrightarrow\infty}v_n=+\infty$.

$\star$ Si $lim_{n\longrightarrow\infty}v_n=-\infty$ Alors $lim_{n\longrightarrow\infty}u_n=-\infty$.

Exemple

- Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites tel que : $v_n=-n^2-4n-4 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

Donc : $(\forall n \in N)$; $v_n \leq -n^2$. Puisque $\lim_{n\to+\infty}(-n^2)=-\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} v_n=-\infty$.

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites tel que : $u_n=n^6+4n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

1.Chapter 1 Limite d'une suite numérique

Donc : $(\forall n \in N)$; $u_n \geq n^6$. Puisque $\lim_{n\to+\infty}(n^6) = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Proposition

Soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites définies sur IN.

Si, à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l$ alors $(\mathrm{u_n})$ est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.

Si, à partir d'un certain rang, $|u_n - l| \leq v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $(\ u_n)$ est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.

Exemple

Soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) les suites définies par :

$$u_n = \frac{1}{n^2+1},\ v_n = \frac{1}{n^2}\ et\ w_n = \frac{1}{n^2+2}$$

Il est claire que : $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = 0$ alors $(\mathrm{u_n})$ est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Application

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

1. Démontrer que $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.
2. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

f Limite d'une suite numérique de la forme $U_{n+1} = f(U_n)$

Proposition

Soit (u_n) une suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$

Si

▷ f est continue sur I,

▷ $f(I) \subset I$,

▷ (u_n) est convergente. Alors la limite ℓ de la suite (u_n) est une solution de l'équation $f(x) = x$

Application

1. On considère la fonction f définie sur $I = \left[0; \frac{1}{4}\right]$ par : $f(x) = x^2 + \frac{3}{4}x$
   a. Étudier la continuité de f sur I
   b. Déterminer $f(I)$.
2. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = \frac{1}{5}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   a. Montrer que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   b. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
   c. en déduire que (u_n) est convergente.
   d. Déterminer la limite de la suite (u_n).