



Généralités sur les suites

1 suite majoré, suite minoré, suite bornée

Soit n_0 un entier naturel et l'intervalle $I = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq n_0\}$

Définitions

- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est majorée s'il existe un réel M tel que : $(\forall n \in I) \quad u_n \leq M$
- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est minorée s'il existe un réel m tel que : $(\forall n \in I) \quad u_n \geq m$.
- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

2 Monotonie d'une suite

D Définition

- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante si :

$$(\forall n \in I) \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$$

- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante si :

$$(\forall n \in I) \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$$

- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est constante si :

$$(\forall n \in I) \quad u_{n+1} = u_n.$$

3 suite arithmétique, somme d'une suite géométrique

D Définition

On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est arithmétique s'il existe un réel r (indépendant de n) tel que :

$$(\forall n \in I) \quad u_{n+1} - u_n = r$$

Le nombre r est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Propriété

Si la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r , alors pour tout $(n; p) \in I^2$:

$$u_n = u_p + (n - p)r \quad \text{et} \quad u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{n - p + 1}{2} (u_p + u_n)$$

Exemple

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_n = \frac{2n}{3} + 3$ est une suite arithmétique,

$$\text{car } U_{n+1} - U_n = \frac{2(n+1)}{3} + 3 - \left(\frac{2n}{3} + 3\right) = \frac{2}{3}.$$

La somme de cette suite est :

$$S = U_0 + U_1 + \dots + U_n = \frac{(U_0 + U_n)}{2} \times (n+1) = \left(\frac{2n+6}{3}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

Application : S

Soit (u_n) une suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{4u_n} \end{cases}$

- 1 Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > \frac{1}{2}$.
- 2 Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{-(2u_n - 1)^2}{4u_n}$.
- 3 Dédire que (u_n) est décroissante et que $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \leq 1$.
- 4 Soit (v_n) une suite définie par $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \frac{3}{2u_n - 1}$.
 - a Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$, puis calculer v_0 .
 - b Déterminer v_n en fonction de n puis déduire $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)$.
- 5 Calculer $S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{20}$.

4 Suite géométrique, somme d'une suite géométrique

D

Définition

Une suite géométrique (U_n) est définie par :

- ♣ un premier terme u_0 ou u_p .
- ♣ Une relation de récurrence $u_{n+1} = q \times u_n$, q étant que la raison de la suite u_n .

Propriété

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite numérique. q est un nombre réel non nul.

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0} Pour la somme suivante :

$$S_n = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n \text{ ou a :}$$

$$\Rightarrow \text{Si } q \neq 1 \text{ on a } S_n = \left[\frac{q^{(n-p+1)} - 1}{q - 1} \right] \times u_p.$$

$$\Rightarrow \text{Si } q = 1 : S = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p(n - p + 1).$$

$$\forall p \geq n_0; \forall q \geq n_0 : u_q = u_p \times q^{q-p} \text{ (avec } q \text{ et } p \text{ de } \mathbb{N})$$

Exemple

Soit (u_n) une suite définie par : $u_n = 3^{n+1}$, Alors (u_n) est une suite géométrique car

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+2}}{3^{n+1}} = 3 \text{ donc } u_{n+1} = 3 \times u_n.$$

La somme de cette suite géométrique est :

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3}.$$

Application

Soit (u_n) une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{u_n}{3-2u_n} \end{cases}$$

- 1 Calculer u_1 et u_2 .
- 2 Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < 1$
- 3
 - a Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(u_n-1)}{3-2u_n}$
 - b Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
- 4 on considère la suite (v_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \frac{u_n}{u_n-1}$
- 5
 - a Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ puis calculer v_0
 - b Exprimer v_n en fonction de n
 - c Dédire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{1}{1+3^n}$
- 6 on pose $(\forall n \in \mathbb{N}^*); S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); S_n = \frac{-3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

**Limite d'une suite numérique****1 Limite finie d'une suite numérique****Activité**

- 1 Compléter le tableau suivant :

n	1	10	10^3	10^5	10^7	10^9	10^{11}
n^2							
$\sqrt{n}$							
$\frac{1}{n}$							
$\frac{1}{n^2}$							
$\frac{1}{n} + 2$							

- 2 Déterminer les limites suivantes :

a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n$

b $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3$

c $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p, p \geq 4$

d $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3}$

2 Limite finie d'une suite numérique

D

Définition

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique et l un nombre réel. On dit que la suite (u_n) tend vers l quand n tend vers $+\infty$ si, pour tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang. et on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Propriété

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $p \geq 4$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0 ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0, p \geq 4$$

Exemple

✓ On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2+1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{n^2}$ puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2+1}{n^2} = 2$

✓ On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3-n}{n^4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{n^4} - \frac{n}{n^4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}$ puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3-n}{n^4} = 0$

Remarque

Si une suite admet une limite finie, alors cette limite est unique.

3 Limite infinie d'une suite numérique

D

Définition

On dit qu'une suite tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux (c.-à-d. contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang). On écrit alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. On dit qu'une suite tend vers $-\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux. Cette définition se traduit formellement par : On écrit alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Propriété

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $p \geq 4$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty; \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty; \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty; \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty; \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty, p \geq 4$$

Exemple

✓ On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3+1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n + \frac{1}{n^2}$ puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + \frac{1}{n^2} = +\infty$ ✓ On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\sqrt{n}+5n^4+6}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} + 5n^3 + \frac{6}{n} = +\infty$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5n^3 = +\infty$

Application

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

$u_n = 2n^3 - 3n^2 + 4n$	$u_n = n^2 - 5\sqrt{n}$	$u_n = \frac{3n^3+2n+4}{n-3}$	$u_n = \frac{1-n}{\sqrt{n+1}}$
$u_n = \sqrt{n+1} - 2n$	$u_n = \sqrt{3n^2+4} - n$	$u_n = \sqrt{n}$	$2n+1$

4 Limite d'une suite géométrique (q^n où $q \in \mathbb{R}$)**Propriété**

Soit q un nombre réel.

◇ Si $-1 < q < 1$ Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

◇ Si $q > 1$ Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$.

◇ Si $q = 1$ Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1$.

Exemple

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{5}\right)^n = +\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} 5^n = +\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{5}\right)^n = +\infty$$

Application

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{1}{4^n}; u_n = \frac{2^n + 3^n}{5^n}; u_n = (\pi - 3)^n.$$

5 Critères de convergence d'une suite numérique**a Convergence d'une suite numérique****D Définition**

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique.

- On dit qu'une suite numérique $(u_n)_n$ est convergente si elle admet une limite finie.
- On dit qu'une suite numérique $(u_n)_n$ est divergente s'elle n'admet pas une limite finie.

Exemple

- La suite définie par $U_n = \frac{1}{n^2}$ est convergente car $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$.
- La suite définie par $V_n = n^3$ est divergente car $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = +\infty$.

T

Théorème

- * Toute suite croissante et majorée est convergente.
 - * Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Ce théorème est dite théorème de la convergence monotone.

Remarque

Ce théorème assure la convergence d'une suite mais ne détermine pas sa limite.

Exemple

- 1 On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 2$.
- Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$; donc $0 \leq u_0 \leq 2$.
 - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leq u_n \leq 2$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.
On a : $0 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow 2 \leq 2+u_n \leq 4 \Rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{2+u_n} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 2$
 - Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 2$. Étudions maintenant la monotonie de la suite (u_n) :
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2+u_n} - u_n = \frac{2+u_n - u_n^2}{\sqrt{2+u_n} + u_n} = \frac{(u_n+1)(2-u_n)}{\sqrt{2+u_n} + u_n}$$

Comme $0 \leq u_n \leq 2$ alors $\frac{(u_n+1)(2-u_n)}{\sqrt{2+u_n} + u_n} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
Ainsi, la suite (u_n) est croissante majorée par 2, donc elle est convergente.

- 2 On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2u_n}$.
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n > 1$.
- Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{3}{2}$; donc $u_0 > 1$.
 - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n > 1$ et montrons que $u_{n+1} > 1$. On a : $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n^2+1}{2u_n} - 1 = \frac{(u_n-1)^2}{2u_n}$. Comme $u_n > 1$, alors $\frac{(u_n-1)^2}{2u_n} > 0$; d'où : $u_{n+1} > 1$.
 - Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n > 1$.
Étudions maintenant la monotonie de la suite (u_n) :
On a pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2+1}{2u_n} - u_n = \frac{1-u_n^2}{2u_n}$. Puisque $u_n > 1$, alors $u_n^2 > 1$. Donc : $\frac{1-u_n^2}{2u_n} < 0$, c'est-à-dire : $u_{n+1} - u_n < 0$. Ainsi, la suite (u_n) est décroissante. De plus, elle est minorée par 1, donc elle est convergente.

b

Critères de convergence d'une suite numérique

Propriété

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites tel que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq n_0$.

★ Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$.

★ Si $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = -\infty$ Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$.

Exemple

1 Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = -n + \cos \sqrt{n-1}$ On a pour tout $n \in \mathbb{N} : \cos \sqrt{n} \leq 1$. Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \leq -n$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n) = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

2 Soit (u_n) la suite numérique définie par : $v_n = \sqrt[3]{n^6 + 1 - \sin n}$ On a pour tout $n \in \mathbb{N} : \sin n \leq 1$, donc $-\sin n \geq -1$. Il s'ensuit donc que : $n^6 + 1 - \sin n \geq n^6$.

c'est-à-dire : $\sqrt[3]{n^6 + 1 - \sin n} \geq \sqrt[3]{n^6}$

.Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \geq n^2$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Propriété

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$.

Si, à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ alors (u_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Si, à partir d'un certain rang, $|u_n - l| \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ alors (u_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Exemple

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) les suites définies par :

$$u_n = \frac{1}{n^2 + 1}, v_n = \frac{1}{n^2} \text{ et } w_n = \frac{1}{n^2 + 2}$$

Il est clair que : $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ alors (u_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Application

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par : $u_n = \frac{n + \sin(n)}{2n + \cos(n)}$ et $v_n = 3 + \frac{\sqrt{n}}{n + (-1)^n}$

1 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \frac{n-1}{2n+1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{2n-1}$ et $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq v_n - 3 \leq \frac{\sqrt{n}}{n-1}$.

2 En déduire les limites de les suites (u_n) et (v_n) .

6 Limite d'une suite numérique de la forme $U_{n+1} = f(U_n)$

Propriété

Soit (u_n) une suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$; Si :

▷ f est continue sur I ,

▷ $f(I) \subset I$,

▷ (u_n) est convergente. Alors la limite ℓ de la suite (u_n) est une solution de l'équation $f(x) = x$

Application

On considère la fonction f définie sur $I = [0; \frac{1}{4}]$ par : $f(x) = x^2 + \frac{3}{4}x$

- 1 Étudier la continuité de f sur I
- 2 Déterminer $f(I)$.
- 3 Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = \frac{1}{5}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
 - a Montrer que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
 - b Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
 - c en déduire que (u_n) est convergente.
 - d Déterminer la limite de la suite (u_n) .