Chapitre

Représentation graphique d'une fonction numérique

Cours 2BSM

I Les branches infinies

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition

Soit f une fonction et $(C_f) = \{M(x, f(x)) / x \in D_f\}$ sa courbe représentative. On dit que (C_f) admet une branche infinie si l'une de ses coordonnées tend vers l'infinie.

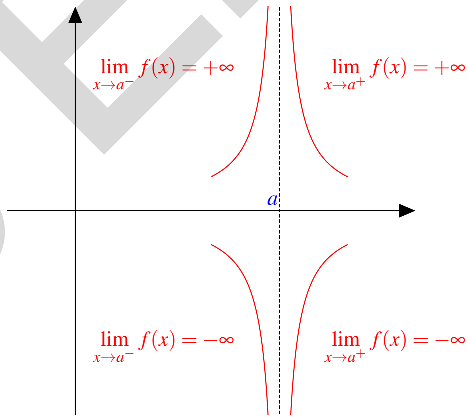
1 Les droites asymptotiques

Définition

Asymptote parallèle à l'axe des ordonnées (vertical

Si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

Alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale de (C_f) au voisinage de a.



• Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 1}{x^2}$.

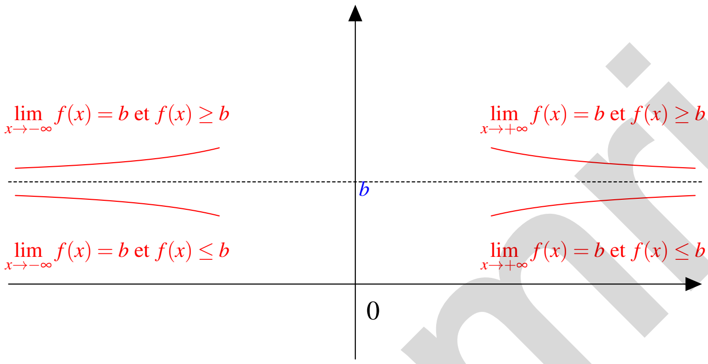
On a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale de (C_f) au voisinage de 0 à droite.

Définition

Asymptote parallèle à l'axe des abscisses (horizontal]

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$).

Alors la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale de (C_f) au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).



Exemple

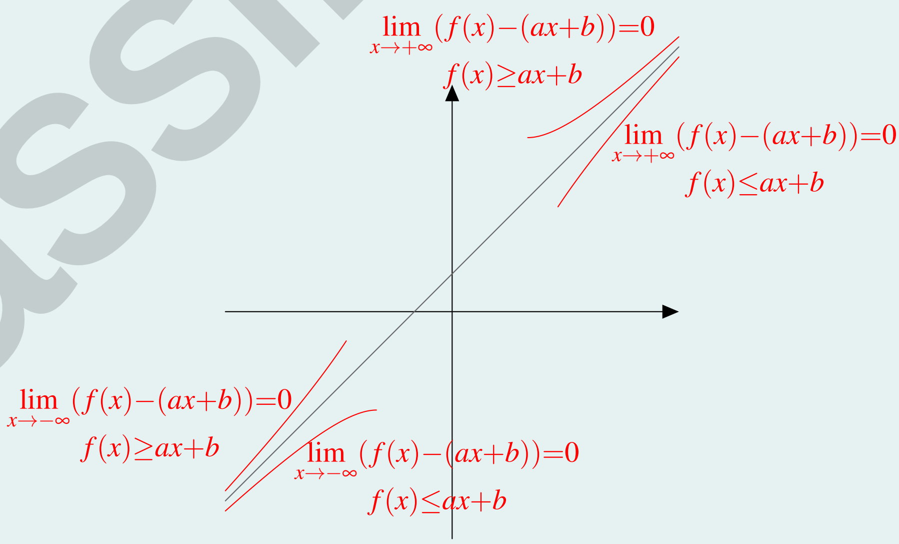
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+x+1}{3x^2}$.

Puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{2}{3}$, la droite d'équation $y = \dfrac{2}{3}$ est une asymptote horizontale de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

Définition

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

On suppose que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Si $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-(ax+b)) = 0$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} (f(x)-(ax+b)) = 0$) alors on dit que la droite d'équation $y = ax+b$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).



• Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x^2}$.

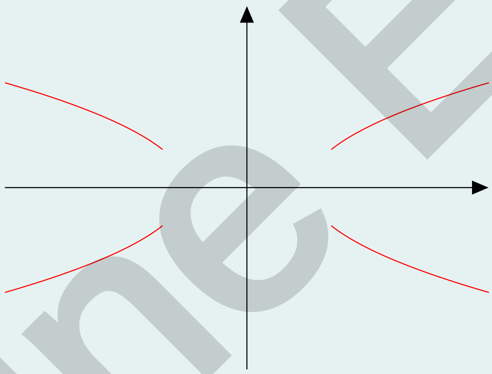
Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

2 Les directions asymptotiques

Dans cette section, on considère une fonction f admet une limite infinie en $+\infty$ (resp. en $-\infty$), et soit (C_f) sa représentation graphique.

Définition

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ (*resp.* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$) alors (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$ (rsep. $-\infty$).



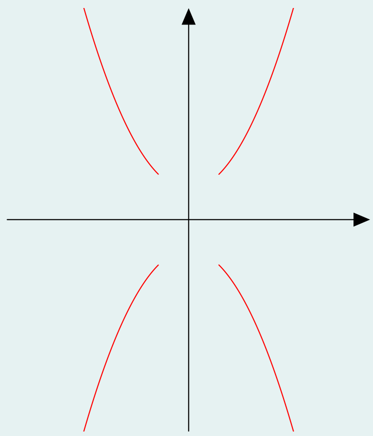
• Exemple

Le graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$. En effet :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \; et \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Définition

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$) alors (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$ (resp. de $-\infty$).



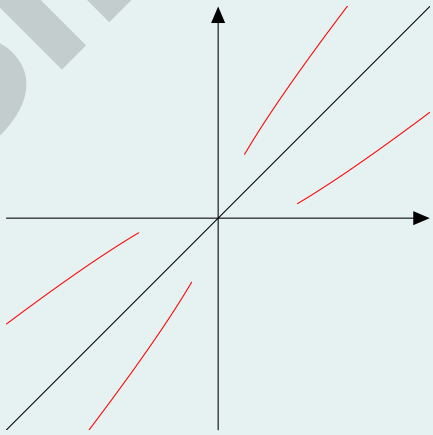
Exemple

Le graphe de la fonction $f(x) = x^3$ définie sur $\mathbb{R}$, admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$. En effet :

1. Au voisinage de $+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.
2. Au voisinage de $-\infty$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

Définition

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \neq 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$ alors (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = ax$ au voisinage de $+\infty$.
La même définition au voisinage de $-\infty$.



Application

Étudier la branche infinie en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$f(x) = \sqrt{x} + x$.

II Concavité et point d'inflexion

1 Convexité

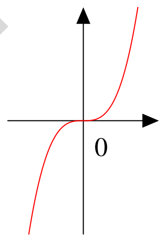
Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et (C_f) sa courbe représentative.

1. On dit que (C_f) est convexe sur I, si (C_f) est entièrement situé au dessus de chacune de ses tangentes.
2. On dit que (C_f) est concave sur I, si (C_f) est entièrement situé au dessous de chacune de ses tangentes.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. D'après le graphe, on remarque que (C_f) est concave sur $]-\infty, 0]$ et convexe sur $[0, +\infty[$.



Propriété

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

1. Si f'' est positive sur I, alors (C_f) est convexe sur I.
2. Si f'' est négative sur I, alors (C_f) est concave sur I.

Exemple

Dans l'exemple précédant, on a $f''(x) = 6x$ donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

D'où (C_f) est concave sur $]-\infty, 0]$ et convexe sur $[0, +\infty[$.

2 Point d'inflexion

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, $a \in I$ et (C_f) sa courbe représentative. On dit que $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f) si la courbe traverse sa tangente en ce point.

Remarque

Un point d'inflexion de (C_f) est point où la courbe change de convexité.

Propriété

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. Si f'' s'annule au point a et change de signe alors $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f).

• Exemple

Dans l'exemple précédant, on remarque que f'' s'annule en 0 et change de singe, donc $A(0, f(0)) = O$ est un point d'inflexion de (C_f).

III Éléments de symétrie d'une courbe

1 Axe de symétrie

Propriété

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.
La droite d'équation $x = a$ telle que $a \in \mathbb{R}$, est un axe de symétrie de la courbe (C_f) si, et seulement si : $(\forall x \in \mathbb{R}), \begin{cases} 2a - x \in D \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$

Remarque

Si $a = 0$ alors f est une fonction paire, et donc (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $(x = 0)$.

• Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$.
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. En effet, $\Delta = -8$, donc le signe de $x^2 - 2x + 3$ est le signe de $a = 1$,

c'est à dire $x^2 - 2x + 3 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2 - x \in \mathbb{R}$, et on a $f(2-x) = f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Donc la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de (C_f).

Application

Montrer que la droite d'équation $x = \pi$ est un axe de symétrie pour la courbe représentative de la fonction définie par $f(x) = \cos(2x)$.

2 Centre de symétrie

Propriété

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.
Le point $\Omega(a,b)$ $(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f) si, et seulement si :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \begin{cases} 2a - x \in D \\ f(2a-x) = 2b - f(x) \end{cases}$$

Remarque

Si $a = b = 0$ alors f est une fonction impaire, et donc (C_f) est symétrique par rapport à l'origine.

Application

Montrer que $\Omega\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour la courbe représentative de la fonction définie par : $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$.