Les suites

Exercice

Considérons la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$$

1. Calculer u_1 et u_2
2. Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n < 1$
3. a- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n-1)^2}{2-u_n}$

   b- Déduire la monotonie de (u_n), puis montrer qu'elle est convergente.
4. Posons $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
   - a. Calculer v_0, et montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$.
   - b. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = \dfrac{v_n - 2}{v_n - 1}$
   - c. Calculer v_n en fonction de n, et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = \dfrac{n}{n+1}$. Calculer $\lim_{x \to +\infty} u_n$

Exercice

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 3} \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$

1. Calculer u_1 et u_2
2. Démontrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - 2 = \dfrac{u_n - 2}{3 - u_n}$
   - a. démontrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n < 2$
   - b. c) démontrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 2)^2}{3 - u_n}$
   - c. déduire que la suite (u_n) est croissante et qu'elle est convergente.
3. posant $v_n = \dfrac{1}{2 - u_n} ; \forall n \in \mathbb{N}$
   - a. calculer $v_{n+1} - v_n$ puis déduire que la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 1$
   - b. Calculer v_0 puis calculer v_n en fonction de n

c Déduire que $u_n = 2 - \frac{1}{v_n}; \forall n \in \mathbb{N}$ puis déduire que $u_n = \frac{2n+1}{n+1}; \forall n \in \mathbb{N}$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Exercice

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2
2. démontrer par récurrence que $u_n > 4; \forall n \in \mathbb{N}$
3. démontrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{-3}{4}(u_n - 4); \forall n \in \mathbb{N}$
   - a déduire que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente
   - b
4. Posant $v_n = u_n - 4; \forall n \in \mathbb{N}$
   - a a) Calculer v_0
   - b Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison

$$q = \frac{1}{4}.$$

   - c Calculer v_n en fonction de n puis déduire que

$$u_n = 4\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4; \forall n \in \mathbb{N}. \text{ calculer } \lim_{n\to+\infty} u_n$$

Exercice

soit $(u_n)_{IN}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}; n \in N \end{cases}$

1.
2. Calculer u_1 et u_2
   - a Démontrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} + 1 = \frac{2(u_n + 1)}{3 + u_n}$
   - b démontrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n > -1$

- c vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - u_n = -\dfrac{(u_n+1)^2}{3+u_n}$
- d déduire que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

3 posant $v_n = \dfrac{u_n+2}{u_n+1}; \forall n \in \mathbb{N}$

- a calculer v_0
- b calculer $v_{n+1} = \dfrac{3u_n+5}{2(u_n+1)}$
- c démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$
- d calculer v_n en fonction de n

4 vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = \dfrac{-v_n+2}{v_n-1}$ puis déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = \dfrac{-n}{n+2}$

5 Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

6 déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = \dfrac{-n}{n+2}$ Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Exercice

Considérons la suite numérique (U_n) définie par : $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{2}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1 Calculer u_1 et u_2

2 Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n > \dfrac{1}{2}$

3 Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{5}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$$

- a Déduire la monotonie de (u_n), puis montrer qu'elle est convergente.
- b Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq 1$, et déduire que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \frac{1}{2} < u_n \leq 1$$

4 Posons $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

- a Calculer v_0, et montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{5}$.
- b Calculer v_n en fonction de n, et déduire que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = \frac{1}{2}\left(11\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1\right)$$

c Calculer $\lim_{x\to+\infty} u_n$

5 Posons

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots\dots\dots + u_{n-1}$$

Montrer que :

$$S_n = \frac{55}{8}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)+\frac{n}{2}$$

Exercice

Considérons la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4} & ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1 Calculer u_1 et u_2

2 Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n > \frac{1}{2}$

a Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$

b Déduire la monotonie de (u_n), puis montrer qu'elle est convergente.

c Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq 1$, et déduire que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \frac{1}{2} < u_n \leq 1$$

3 Posons $v_n = u_n - \frac{1}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

a Calculer v_0, et montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

b Calculer v_n en fonction de n, et déduire que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = \frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

c Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Exercice

Considérons la suite suivante : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 1$
   - a. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)^2}{u_n}$
   - b. Étudier la monotonie de (u_n) et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \leq 2$
   - c. Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad 1 < u_n \leq 2$
3. Considérons la suite (v_n) tel que $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}; n \in \mathbb{N}$
   - a. Calculer v_0 et v_1
   - b. Montrer que (v_n) est arithmétique de raison $r = -1$ et déterminer v_n en fonction de n.
   - c. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \dfrac{v_n - 2}{v_n - 1}$ et déduire u_n en fonction de n. Calculer $\lim_{x \to +\infty} u_n$
   - d. Calculer $S_n = v_0 + v_1 + \ldots. + v_n$