

# Les suites

# Exercice

Considérons la suite numérique  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} \quad ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1 Calculer  $u_1$  et  $u_2$ 

2 Montrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N})$   $u_n < 1$ 

3 a- Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N})u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{2 - u_n}$ 

b- Déduire la monotonie de  $(u_n)$ , puis montrer qu'elle est convergente.

4 Posons  $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ 

a Calculer  $v_0$ , et montrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique de raison r=1.

b Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N})u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1}$ 

Calculer  $v_n$  en fonction de n, et déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N})u_n = \frac{n}{n+1}$ . Calculer  $\lim_{x \to +\infty} u_n$ 

### Exercice

Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n - 3}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$ 

1 Calculer  $u_1$  et  $u_2$ 

2 Démontrer que  $(\forall n \in \mathbb{N})u_{n+1} - 2 = \frac{u_n - 2}{3 - u_n}$ 

a démontrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N})u_n < 2$ 

b c) démontrer que  $(\forall n \in \mathbb{N})u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 2)^2}{3 - u_n}$ 

déduire que la suite  $(u_n)$  est croissante et qu'elle est convergente.

 $3 \text{ posant } v_n = \frac{1}{2 - u_n}; \forall n \in \mathbb{N}$ 

a calculer  $v_{n+1} - v_n$  puis déduire que la suite  $(v_n)$  est arithmétique de raison r = 1

b Calculer  $v_0$  puis calculer  $v_n$  en fonction de n

## Exercice

Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$ 

- Calculer  $u_1$  et  $u_2$
- démontrer par récurrence que  $u_n > 4$ ;  $\forall n \in \mathbb{N}$
- démontrer que  $u_{n+1} u_n = \frac{-3}{4} (u_n 4); \forall n \in \mathbb{N}$ 
  - a déduire que la suite  $(u_n)$  est décroissante et qu'elle est convergente
- 4 Posant  $v_n = u_n 4; \forall n \in \mathbb{N}$ 
  - a a) Calculer  $v_0$
  - b Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison

$$q=\frac{1}{4}$$
.

Calculer  $v_n$  en fonction de n puis déduire que

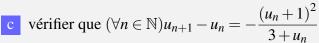
$$u_n = 4\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4; \forall n \in \mathbb{N}. \text{ calculer } \lim_{n \to +\infty} u_n$$

## **Exercice**

soit  $(u_n)_{IN}$  la suite définie par :  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}; n \in N \end{cases}$ 

- Calculer  $u_1$  et  $u_2$ 
  - Démontrer que  $(\forall n \in \mathbb{N})u_{n+1} + 1 = \frac{2(u_n + 1)}{3 + u_n}$
  - b démontrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N})u_n > -1$





- d déduire que la suite  $(u_n)$  est décroissante et qu'elle est convergente.
- 3 posant  $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n + 1}; \forall n \in \mathbb{N}$ 
  - a calculer  $v_0$
  - b calculer  $v_{n+1} = \frac{3u_n + 5}{2(u_n + 1)}$
  - démontrer que la suite  $(v_n)$  est arithmétique de raison  $\frac{1}{2}$
  - d calculer  $v_n$  en fonction de n
- 4 vérifier que  $(\forall n \in \mathbb{N})u_n = \frac{-v_n + 2}{v_n 1}$  puis déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N})u_n = \frac{-n}{n + 2}$
- 5 Calculer  $\lim_{n\to+\infty} u_n$
- 6 déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N})u_n = \frac{-n}{n+2}$  Calculer  $\lim_{n \to +\infty} u_n$

#### Exercice

Considérons la suite numérique  $(U_n)$  définie par :  $u_0 = 6$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ 

- Calculer  $u_1$  et  $u_2$
- Montrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N})u_n > \frac{1}{2}$
- 3 Montrer que

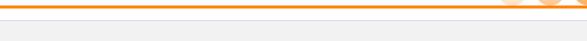
$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{5} \left( u_n - \frac{1}{2} \right)$$

- Déduire la monotonie de  $(u_n)$ , puis montrer qu'elle est convergente.
- b Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N})$   $u_n \le 1$ , et déduire que

$$(\forall n \in \mathbb{N})\frac{1}{2} < u_n \le 1$$

- Posons  $v_n = u_n \frac{1}{2}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ 
  - Calculer  $v_0$ , et montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = \frac{1}{5}$ .
  - b Calculer  $v_n$  en fonction de n, et déduire que

$$(\forall n \in \mathbb{N})u_n = \frac{1}{2} \left( 11 \left( \frac{1}{5} \right)^n + 1 \right)$$



- Calculer  $\lim_{x\to +\infty} u_n$
- 5 Posons

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

Montrer que:

$$S_n = \frac{55}{8} \left( 1 - \left( \frac{1}{5} \right)^n \right) + \frac{n}{2}$$

#### **Exercice**

Considérons la suite numérique  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1 Calculer  $u_1$  et  $u_2$
- 2 Montrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N})u_n > \frac{1}{2}$ 
  - a Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N})u_{n+1} u_n = -\frac{1}{2}\left(u_n \frac{1}{2}\right)$
  - b Déduire la monotonie de  $(u_n)$ , puis montrer qu'elle est convergente.
  - Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N})$   $u_n \le 1$ , et déduire que

$$(\forall n \in \mathbb{N})\frac{1}{2} < u_n \le 1$$

- Posons  $v_n = u_n \frac{1}{2}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ 
  - Calculer  $v_0$ , et montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = \frac{1}{2}$ .
  - b Calculer  $v_n$  en fonction de n, et déduire que

$$(\forall n \in \mathbb{N})u_n = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

c Calculer  $\lim_{n\to+\infty} u_n$ 



### **Exercice**

Considérons la suite suivante :  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$ 

- Calculer  $u_1$  et  $u_2$
- Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 1$ 
  - Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N})$ :  $u_{n+1} u_n = \frac{-(u_n 1)^2}{u_n}$
  - b Étudier la monotonie de  $(u_n)$  et déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N})$  :  $u_n \leq 2$
  - C Déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N})$ :  $1 < u_n \le 2$
- Considérons la suite  $(v_n)$  tel que  $v_n = \frac{u_n 2}{u_n 1}$ ;  $n \in \mathbb{N}$ 
  - a Calculer  $v_0$  et  $v_1$
  - b Montrer que  $(v_n)$  est arithmétique de raison r = -1 et déterminer  $v_n$  en fonction de
  - Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N})$ :  $u_n = \frac{v_n 2}{v_n 1}$  et déduire  $u_n$  en fonction de n. Calculer
  - d Calculer  $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

