

Ensembles : $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{D}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$

Série d'exercices

Exercice : 1

Recopier puis compléter en utilisant l'un des symboles $\in$; $\notin$; $\subset$; $\not\subset$

1. $-12 \dots \mathbb{N}$; $-12 \dots \mathbb{Z}$; $-12 \dots \mathbb{Q}$; $0 \dots \mathbb{R}^*$; $0 \dots \mathbb{R}$
2. $37,9 \dots \mathbb{N}$; $37,9 \dots \mathbb{Q}$; $3 \dots \mathbb{R}^-$; $1,16161616 \dots \mathbb{D}$
3. $\frac{95}{19} \dots \mathbb{N}$; $\frac{95}{19} \dots \mathbb{Z}$; $\frac{95}{19} \dots \mathbb{Q}$; $\frac{12}{3} \dots \mathbb{Z}$; $\frac{1}{2} \dots \mathbb{Q}$
4. $\frac{7}{11} \dots \mathbb{N}$; $\frac{7}{11} \dots \mathbb{Z}$; $\frac{7}{11} \dots \mathbb{Q}$; $\sqrt{2} \dots \mathbb{Q}$; $\sqrt{25} \dots \mathbb{N}$
5. $\mathbb{N} \dots \mathbb{Z}$; $\mathbb{Q} \dots \mathbb{D}$; $\mathbb{Q} \dots \mathbb{R}$; $\mathbb{N} \dots \mathbb{N}^*$; $\mathbb{N}^* \dots \mathbb{Z}^+$

Exercice : 2

Soient x et y deux nombres entiers naturels premiers entre eux tels que : $\frac{1001}{5577} + \frac{285}{665} = \frac{x}{y}$
Calculer $x + y$

Exercice : 3

a, b, c sont des réels tels que $abc \neq 0$
Si $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$, calculer c en fonction de a et b

Exercice : 4

Soient a et b deux nombres réels non nuls tels que : $(a - b)(3a - 2b) = 2ab$

1. Montrer que $a \neq b$ et $a \neq -b$
2. Calculer $\frac{a+b}{a-b}$

Exercice : 5

Calculer le nombre réel α sachant que :

$$2 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{\alpha}$$

Exercice : 6

Calculer x sachant que :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + x = 2$$

Exercice : 7

Déterminer n de $\mathbb{N}^*$ dans chaque cas :

$$1. 7 - \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} + \frac{17}{16} + \frac{33}{32} + \frac{65}{66} \right) = \frac{n}{64}$$

$$2. \frac{1}{3 - \frac{1}{4 - \frac{1}{5 - \frac{1}{6}}}} = \frac{10(2n-3)}{43n}$$

Exercice : 8

Soient x, y et z des nombres réels non nuls tels que :

$$(13x + y)(13x + z) = 169x(x + 1) + yz$$

Calculer $y + z$

Exercice : 9

Soient x et y deux nombres réels non nuls tels que : $x \neq y$ et $2005(x + y) = 1$

$$1. \text{ Montrer que : } \frac{1}{xy} = 2005 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

2. Calculer la valeur de l'expression I suivante :

$$I = \frac{y}{y-x} - \frac{y-x}{y} - \frac{x}{y-x} - \frac{y-x}{x} + \frac{y}{x} - \frac{x}{y} + 2$$

Exercice : 10

Simplifier les écritures suivantes :

$$A = \frac{8^{93} \times 3^{-51}}{9^{25} \times 2^{280}}$$

$$B = \frac{\left(\frac{5^7 \times 2^{-5}}{8 \times 625}\right)}{\left(\frac{10^3 \times 5^2}{56}\right)}$$

$$C = \frac{(3^7 \times 2^{-6} \times 9^{-1})^2}{(9^{-2} \times 3^2 \times 2^{-1})^3}$$

$$D = \left(\frac{5^8}{10^2 \times 2}\right) \left(\frac{2^3 \times 5^{-3}}{4 \times 25}\right)^2$$

Exercice : 11

En physique

Écrire les constantes universelles sous forme d'écriture scientifique :

1. $1U.A = 150000000 \text{ km}$ "Unité Astronomique".
2. $1A.L = 950 \times 10^{13} \text{ m}$ "Année Lumière".
3. $G = 0,0667 \times 10^{-10} N.m^2.kg^{-2}$ "Constante de gravitation universelle".
4. $c = 299792458 m.s^{-1} \simeq 300000000 m.s^{-1}$ "La célérité de la lumière dans le vide".
5. $g = 980,665 \times 10^{-2} N.kg^{-1}$ "Intensité du champs de pesanteur".
6. $e = 1602,1892 \times 10^{-22} C$ "Charge élémentaire".
7. $N_A = 60220,45 \times 10^{19} \text{ km}$ "Nombre d'Avogadro".

Exercice : 12

Factoriser ce qui suit :

1. $A = 9x^2 - 4$
2. $B = 64x^3 - 27$
3. $C = 27x^4 + 64x$
4. $D = (3x+2)^2 - 36(x+1)^2$
5. $E = (-2x+1)^2 - (4-8x)(x+3) + (3-12x^2)$
6. $F = 36 - 16x^2$

Exercice : 13

Développer et réduire ce qui suit :

1. $(2x+3)^2$

2. $(7x-3y)^2$

3. $(x+y)^2 - (x-y)^2$

4. $(2x+3y)^3$

5. $(a+b)^3 - (a-b)^3$

6. $(a+b-c)^3$

Exercice : 14

x et y sont deux réels tels que : $x^2 - y^2 = -1$

Calculer : $(x+y) \left((x+y)^{-1} + \frac{1}{(x-y)^{-1}} \right)$

Exercice : 15

x, y et z sont trois nombres distincts deux à deux. Montrer que :

$$\frac{x}{(x-y)(x-z)} + \frac{y}{(y-z)(y-x)} + \frac{z}{(z-x)(z-y)} = 0$$

Exercice : 16

x, y et z sont des nombres réels.

On pose : $p = \frac{x+y+z}{2}$. Montrer que :

$$p^2 + (p-x)^2 + (p-y)^2 + (p-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Exercice : 17

1. Développer $(x+y+z)^2$

2. On suppose que x, y et z sont des nombres réels non nuls. Montrer que :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \quad \text{signifie que} \quad (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Exercice : 18

Calculer :

$$A = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{999} - \frac{1}{1000}\right)$$

$$B = \left(2 - \frac{1}{3}\right) \left(2 - \frac{2}{3}\right) \left(2 - \frac{3}{3}\right) \dots \left(2 - \frac{100}{3}\right)$$

Exercice : 19

a, b et c sont des réels positifs tels que :

$$0 < a < b < c \text{ et } 2b = a + c$$

Montrer que :
$$\frac{2}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

Exercice : 20

Quel est le nombre de chiffres du nombre entier :

$$N = 4^{32} \times 5^{71} ?$$

Exercice : 21

Déterminer tous les nombres entiers naturels non nuls x tels que : $(x^x)^x = x^{(x^x)}$

Exercice : 22

On considère a et b tels que :

$$a = \sqrt{14 + 6\sqrt{5}} \text{ et } b = \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$$

1. Calculer $(3 + \sqrt{5})^2$ et $(3 - \sqrt{5})^2$ puis simplifier a et b .
2. Montrer qu'il existe un nombre entier naturel t tel que :

$$(7 + 3\sqrt{5})(3 - \sqrt{5})\sqrt{7 - 3\sqrt{5}} = t\sqrt{2}$$

Exercice : 23

Montrer que :

1. $\left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = 1$
2. $36^3 = (27+3\sqrt{5})^3 + (27-3\sqrt{5})^3$
3. $4^3 = \left(\frac{\sqrt{85}+1}{2}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{85}-1}{2}\right)^3$

Exercice : 24

x est un nombre réel non nuls.

On pose : $X = x + \frac{1}{x}$ et $Y = x - \frac{1}{x}$

1. Calculer $x^2 + \frac{1}{x^2}$; $x^3 + \frac{1}{x^3}$; $x^4 + \frac{1}{x^4}$ en fonction de X
2. Calculer $x^2 + \frac{1}{x^2}$; $x^3 + \frac{1}{x^3}$; $x^4 + \frac{1}{x^4}$ en fonction de Y

Exercice : 25

On pose : $a = \sqrt{3} - \sqrt{2}$; $b = \sqrt{3} + \sqrt{2}$; $c = \frac{2}{\sqrt{5}-1}$

Montrer que :

$$a^4 + 1 = 10a^2 ; b^4 + 1 = 10b^2 ; c = \frac{1}{1 - \frac{1}{1+c}}$$

Exercice : 26

Déterminer un nombre entier naturel n composé de deux chiffres tel que : $\sqrt{n} + \sqrt{n+7} \in \mathbb{N}$

Exercice : 27

x et z sont deux entiers naturels tels que :

$$2^{3x+z-3} - 11 \times 2^{3x-5} + 2^{z+2} = 2000$$

1. Montrer que : $\left(2^{3x-5} + 1\right)\left(2^{z+2} - 11\right) = 3^2 \times 13 \times 17$
2. En déduire les valeurs de x et z .

Exercice : 28

Déterminer n de $\mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{1 + 5^n + 6^n + 11^n} \in \mathbb{N}$