Chapitre

Barycentre dans le plans

Cours 1BSM

Recommandations pédagogiques	Capacités attendues
► Avant de définir le barycentre, il sera utile de sensibiliser les élèves sur la relation qui existe entre cette notion en mathématique et d'autres notions dans certaines disciplines de la même spécialité ► On mettra en évidence le rôle du barycentre et du produit scalaire pour résoudre des problèmes géométriques et pour déterminer certains lieux géométriques, tels : • $\{M \in (P) / \vec{u}.\overrightarrow{AM} = k\}$ • $\{M \in (P) / \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k\}$ • $\{M \in (P) / \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = k\}$ • $\{M \in (P) / \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = k\}$ • $\{M \in (P) / \frac{MA}{MB} = k\}$ à travers des exemples.	► Utilisation de la notion de barycentre pour simplifier les expressions vectorielles. ► Utilisation de la notion de barycentre dans le plan pour établir des alignements de points, des points de concours de droites. ► Construction du barycentre de n points tels que $2 \leq n \leq 4$. ► Utilisation du barycentre pour résoudre les problèmes géométriques et les problèmes de lieu.

I Barycentre de deux points

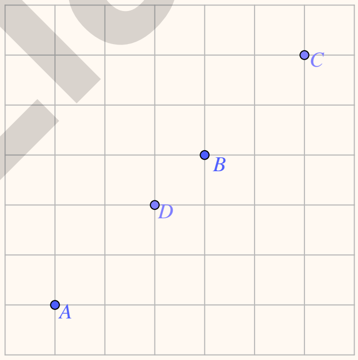
Activité

Soient A et B deux points dans le plan.

1. On considère le point G dans le plan tel que : $2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$
   - a. Déterminer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$
   - b. En déduire que le point G existe et unique.
   - c. Placer le point G.
2. Est-ce qu'il existe un point M dans le plan tel que : $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$

Activité

Soient A, B, C et D les points représentés dans la figure suivante :



1. Déterminer le nombre k dans les cas suivants :

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{DA};\ \overrightarrow{CB} = k\overrightarrow{CD}$$

2. Déterminer les deux réels a et b tels que : $a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$.

On a $5\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = 0$. On dit que A est le barycentre des deux points pondérés $(B,5)$ et $(C,-3)$.

1 Point pondéré

Définition

On appelle point pondéré ou point massif le couple $(A;a)$ où A est un point du plan ou de l'espace et a un réel.

2 Barycentre de deux points :

Définition

Soient A et B deux points et a et b deux réels dont **la somme n'est pas nulle**.
Alors il existe un unique point G du plan tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.
Ce point G est **le barycentre** des points A et B affectés des coefficients a et b.
On dit que G est le barycentre du système de points $(A;a)$ et $(B;b)$.
On écrit : $G = Bar\{(A;a),(B;b)\}$

3 Position du barycentre :

Soit G le barycentre du système de points $(A;a)$ et $(B;b)$. On a :

1. $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
3. Le points G, A et B sont alignés.

Remarque

Si $a = b$, on dit que G est l'isobarycentre de A et B, c'est-à-dire G est le milieu de $[AB]$ et on a : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

4 Homogénéité du barycentre

Propriété

Si G est le barycentre de $(A;a)$ et $(B;b)$, alors pour tout réel $k \neq 0$, alors G est le barycentre de $(A;ka)$ et $(B;kb)$.

Exemples

Soit G est le barycentre de $(A;a)$ et $(B;b)$.On a :

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow ka\overrightarrow{GA} + kb\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$
$$\Rightarrow G = Bar\{(A;ka),(B;kb)\} \qquad (\text{Car } ka+kb \neq 0)$$

5 Réduction vectorielle

Propriété

Si G est le barycentre de $(A;a)$ et $(B;b)$, avec $a+b \neq 0$.
Alors pour tout point M du plan, on a : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$

Exemples

On a : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = a(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + b(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) = (a+b)\overrightarrow{MG} + a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB}$.
Or si G est le barycentre de $(A;a)$ et $(B;b)$, $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.
D'où l'égalité : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$.

6 Coordonnées du barycentre :

Propriété

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ alors les coordonnées du barycentre G du système $(A;a)$ et $(B;b)$ sont $x_G = \dfrac{ax_A + bx_B}{a+b}$ et $y_G = \dfrac{ay_A + by_B}{a+b}$.

Exemples

Soit G le barycentre du système $(A;a)$ et $(B;b)$.
Alors pour tout M du plan on a : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$.
Si $M=O$, on obtient $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}=(a+b)\overrightarrow{OG}$
Et $\overrightarrow{OG}=\dfrac{a}{a+b}\overrightarrow{OA}+\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{OB}$
C'est-à-dire $\overrightarrow{OG}=\dfrac{ax_A}{a+b}\overrightarrow{i}+\dfrac{ay_A}{a+b}\overrightarrow{j}+\dfrac{bx_B}{a+b}\overrightarrow{i}+\dfrac{by_B}{a+b}\overrightarrow{j}$
Soit $\overrightarrow{OG}=\dfrac{ax_A+bx_B}{a+b}\overrightarrow{i}+\dfrac{ay_A+by_B}{a+b}\overrightarrow{j}$
D'où $G\left(\dfrac{ax_A+bx_B}{a+b};\dfrac{ay_A+by_B}{a+b}\right)$

Application

Déterminer les coordonnées du point G le barycentre des points pondérés $(\mathrm{B},2)$ et $(\mathrm{A},1)$ tels que $B(2,1)$ et $A(-1,0)$ puis tracer une figure

II Barycentre de trois points pondérés :

1 Définition :

Définition

Soient A, B et C trois points distincts et a, b et c trois réels dont la somme n'est pas nulle. Alors il existe un unique point G du plan tel que $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.
G est le barycentre des points pondérés $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$.
On écrit : $G=Bar\{(A;a),(B;b),(C;c)\}$.
De même si $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}+d\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$ et $a+b+c+d\neq 0$.
Alors $G=Bar\{(A;a),(B;b),(C;c),(D;d)\}$

Exemples

Quels que soient a, b et c :

$$\begin{aligned}a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} &\iff a\overrightarrow{GA}+b(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+c(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{0}\\ &\iff a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{GA}+c\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}\\ &\iff (a+b+c)\overrightarrow{GA}=-b\overrightarrow{AB}-c\overrightarrow{AC}\\ &\iff (a+b+c)\overrightarrow{AG}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

1. Si $a+b+c\neq 0$ alors l'équation équivaut à $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$
   Le point G existe et est unique.
2. Si $a+b+c=0$ alors l'équation équivaut à $b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$.

Cette équation n'admet pas de solution si $b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{0}$ et elle admet une infinité de solution si $b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$.

Conséquences :

1. $G=Bar\{(A;a),(B;b),(C;c)\}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{a+b+c}\left(b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}\right)$
2. Si A, B et C ne sont pas alignés le point G appartient au plan (ABC).
3. Le barycentre ne change pas si on multiplie les trois coefficients par un réel $k\neq 0$.
4. Si $a=b=c$, G est le barycentre de $(A;1)$, $(B;1)$ et $(C;1)$, G est l'isobarycentre de A, B et C ou G est aussi le centre de gravité du triangle ABC.

2 Propriétés :

Propriété

Si G est le barycentre de $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$, avec $a+b+c\neq 0$, alors pour tout point M du plan, on a : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\overrightarrow{MG}$.

Exemples

On a : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=a(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})+b(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})+c(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})$
$=(a+b+c)\overrightarrow{MG}+a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}$

Or si G est le barycentre de $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$, $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.
D'où l'égalité : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\overrightarrow{MG}$.

Propriété

Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ si $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$ alors les coordonnées du barycentre G du système $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$ sont :
$x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{a+b+c}$ et $y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{a+b+c}$

Exemples

Soit G le barycentre du système $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$.
Alors pour tout M du plan on a : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\overrightarrow{MG}$.
Si $M=O$, on obtient $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=(a+b+c)\overrightarrow{OG}$
Soit $\overrightarrow{OG}=\dfrac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$
C'est-à-dire $\overrightarrow{OG}=\dfrac{ax_A}{a+b+c}\vec{i}+\dfrac{ay_A}{a+b+c}\vec{j}+\dfrac{bx_B}{a+b+c}\vec{i}+\dfrac{by_B}{a+b+c}\vec{j}+\dfrac{cx_C}{a+b+c}\vec{i}+\dfrac{cy_C}{a+b+c}\vec{j}$

Soit $\overrightarrow{OG}=\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c}\vec{i}+\dfrac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\vec{j}$. D'où $G\left(\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c};\dfrac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)$

Application

Déterminer les coordonnées du point G, le barycentre des points pondérés $(\mathrm{A},2)$, $(\mathrm{B},1)$ et et $(\mathrm{C},1)$ tels que $A(2,1)$, $B(1,1)$ et $C(-1,3)$.

3 Associativité du barycentre :

Propriété

Si G est le barycentre de $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$, avec $a+b+c\neq 0$ et si H est le barycentre de $(A;a)$ et $(B;b)$ avec $a+b\neq 0$, alors G est le barycentre de $(H;a+b)$ et $(C;c)$.

Exemples

On a : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. On déduit $(a+b)\overrightarrow{GH}+a\overrightarrow{HA}+b\overrightarrow{HB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
Or H est le barycentre de $(A;a)$ et $(B;b)$, donc $a\overrightarrow{HA}+b\overrightarrow{HB}=\vec{0}$ et $(a+b)\overrightarrow{GH}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
Donc G est le barycentre de $(H;a+b)$ et $(C;c)$.

Remarque

Soit G est le barycentre des points pondérés $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$.

- Si $b+c\neq 0$, A' est le barycentre partiel de $(B;b)$ et $(C;c)$, alors $G=Bar\{(A;a),(A';b+c)\}$.
- Si $a+c\neq 0$, B' est le barycentre partiel de $(A;a)$ et $(C;c)$, alors $G=Bar\{(B;b),(B';a+c)\}$.
- Si $a+b\neq 0$, C' est le barycentre partiel de $(A;a)$ et $(B;b)$, alors $G=Bar\{(C;c),(C';a+b)\}$.
  Lorsqu'elles existent les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en G.

Application

Soit G le barycentre des points pondérés $(\mathrm{A},1)$, $(\mathrm{B},2)$ et et $(\mathrm{C},3)$.
Et soit E le barycentre des points pondérés $(A,1)$ et $(C,3)$.

1. Montrer que G est le barycentre de $(B,1)$ et $(E,2)$.
2. Simplifier les expressions suivantes :
   a. $\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BM}+3\overrightarrow{CM}$ b. $\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{CM}$ c. $\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{EM}$
3. Déterminer l'ensemble des points M vérifiant :
   a. $\|\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{CM}\|=4$
   b. $\|\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BM}+3\overrightarrow{CM}\|=\|\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{AM}\|$
   c. $\|\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{EM}\|=\|3\overrightarrow{AM}\|$

4 Détermination de l'ensemble des points :

L'ensemble des points : $(\Gamma_k) = \left\{M \in (P) \ / \ \| a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} \| = k\right\}$:

Si $a+b+c \neq 0$ alors il existe un point G (barycentre des points $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$) tel que : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$. Donc $M \in (\Gamma_k) \Leftrightarrow MG = \dfrac{k}{|a+b+c|}$.

1^{ier} cas : si $k < 0$ alors $(\Gamma_k) = \varnothing$

2^{ime} cas : si $k = 0$ alors $MG = 0$. Soit $(\Gamma_0) = \{G\}$

3^{ime} cas : si $k > 0$ alors (Γ_k) est un cercle de centre G et de rayon $r = \dfrac{k}{|a+b+c|}$

III Barycentre d'un nombre quelconque de points

Toutes les définitions et propriétés précédentes se généralisent à n points pondérés.

- Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n points et $a_1, a_2, \dots, a_n$ n réels.
  Il existe un unique point G tel que $a_1\overrightarrow{GA_1} + a_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $a_1 + a_2 + \cdots a_n \neq 0$.
  Ce point est appelé barycentre des n points pondérés $(A_1, a_1); (A_2, a_2); \dots; (A_n, a_n)$.
- Règle d'associativité :
  Pour trouver le barycentre G, de n points, lorsque $n \geq 3$, on peut remplacer p points, pris parmi les n points, par leur barycentre (s'il existe) affecté de la somme de leurs coefficients.
- Soit $k \neq 0$.
  $G = \text{Bar}(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n) \Longleftrightarrow G = \text{Bar}(A_1, ka_1), (A_2, ka_2), \dots, (A_n, ka_n)$.
  Autrement dit, on ne change pas le barycentre en changeant les coefficients par des coefficients proportionnels.
- Si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n \neq 0$ alors G est appelé isobarycentre des n points $A_1, A_2, \dots, A_n$.
- Pour tout point M,

$$a_1\overrightarrow{MA_1} + a_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{MA_n} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\overrightarrow{MG}$$

- Dans un repère, le barycentre de n points pondérés a pour coordonnées la moyenne des coordonnées des n points pondérés par les n coefficients.
  Dans le cas d'un repère du plan, on obtient :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{a_1 x_{A_1} + a_2 x_{A_2} + \cdots + a_n x_{A_n}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \\ y_G = \dfrac{a_1 y_{A_1} + a_2 y_{A_2} + \cdots + a_n y_{A_n}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \end{cases}$$