Chapitre

Étude de fonctions

Cours 2BSX

I Étude de fonctions

1 Branches infinies

D Définition

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction f et $M(x, f(x))$ un point de (C_f). On dit que (C_f) admet une branche infinies si l'une au moins des coordonnées de M tend vers l'infini.

Propriété

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ **alors** la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontal à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de ∞.

Exemple

On considère la fonction f définie sur $]2,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ donc $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote horizontal d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.

Propriété

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ **alors** la droite d'équation $x = a$ est une asymptote vertical à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage a.

Exemple

On considère la fonction f définie sur $]2,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$.

On a $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ donc $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote vertical d'équation $x = 2$ à droite en 2.

Propriété

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ **alors** on calcule $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Trois cas ce présents :

1. **Si** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ **alors** $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de ∞.
2. **Si** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ **alors** $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de ∞.

3 **Si** $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a\neq 0$ **alors** on calcule $\lim_{x\to\infty} f(x)-ax$. Deux cas se présents :

a **Si** $\lim_{x\to\infty} f(x)-ax=\infty$ **alors** $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$ au voisinage de ∞.

b **Si** $\lim_{x\to\infty} f(x)-ax=b$ **alors** $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y=ax+b$ au voisinage de ∞.

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=2x+\sqrt{x}$.
On a $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, on calcul donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$, par suite on calcul $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=+\infty$.
D'où $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=2x$ au voisinage de $+\infty$.

Application

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{3x^2-2x+1}{x-2}$.

1 Déterminer D_f

2 Étudier la branche infinie de (C_f) en $-\infty$.

2 Concavité d'une fonction

D Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

1 On dit que f est convexe sur I si sa courbe représentative (C_f) est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.

2 On dit que f est concave sur I si sa courbe représentative (C_f) est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.

3 Un point où la courbe (C_f) traverse sa tangente s'appelle un point d'inflexion de (C_f).

Propriété

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

1 Si $f''(x)>0$ sur I, alors on dit que (C_f) est convexe.

2 Si $f''(x)<0$ sur I, alors n dit que (C_f) est concave.

3 Si f'' s'annule en a et change de signe, alors on dit que $A(a,f(a))$ est un point d'inflexion pour (C_f).

Application

On considère la fonction définie sur $I=[0;\pi]$ par : $f(x)=\cos(x)$. Étudier la concavité de (C_f) sur I et vérifier que (C_f) possède un point d'inflexion K dont on détermine ses coordonnées.

3 Axe et centre de symétrie d'une courbe

D Définition

Soit f une fonction numérique.

1. La droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie de la courbe (C_f). Si et seulement si pour tout $x \in D_f$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.
2. Le point $\Omega(a,b)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f). Si et seulement si pour tout $x \in D_f$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

Application

1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$. Montrer que la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de (C_f).
2. Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2x - 3 - \dfrac{3}{x+2}$. Montrer que le point $\Omega(-2; -7)$ est un centre de symétrie de (C_f).