Chapitre

Théorème de Rolle et des accroissements finis. (T.A.F)

Cours 2BSM

Les orientations pédagogiques 1	Capacités attendues
- On insistera sur les applications du théorème de Rolle, du théorème des accroissements finis et de linégalité des accroissements finis pour encadrer, majorer et minorer les expressions algébriques et étudier les suites numériques ; On insistera sur linterprétation géométrique des différents théorèmes et propriétés présentés dans ce paragraphe ;	- Maîtriser l'interprétation graphique du théorème de Rolle, du théorème des accroissements finis et de l'inégalité des accroissements finis ; -Appliquer ces théorèmes aux suites numériques de la forme : $u_{n+1} = f(u_n)$ ou dans l'encadrement d'expressions et de formules algébriques ou de nombres réels ;
Les prés-requis	**Les extensions**
▶ L'ordre dans $\mathbb{R}$ ▶ Calcul trigonométrique ▶ Généralités sur les fonctions ; ▶ Les suites numériques ; ▶ Limites et continuité ; ▶ La Dérivabilité	▶ Étude des fonctions ; ▶ Calcul intégrale

Masse horaire :........ Heures

- Séance 1 :Théorème de Rolle (1h)
- Séance 2 :Applications (1)
- Séance 3 :Théorème des des accroissement finis 1h)
- Séance 4 :Applications (1h)
- Séance 5 :Exercices de synthèses (2h)

I Théorème de Rolle

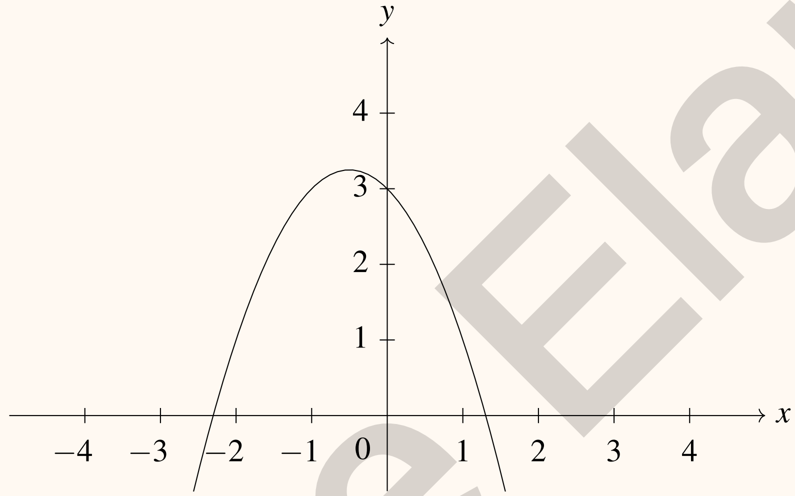
Activité

La courbe ci-dessous est la courbe de la fonctions : $f(x) = -x^2 - x + 3$

1 Vérifier que $f(-2) = f(1)$.

2 2- Trouver le réel c dans] - 2,1 [tel que $f'(c) = 0$

3 3- Interpréter géométriquement résultat.



T Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que : $f(a) = f(b)$. Alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que : $f'(c) = 0$.

Exemples

Puisque f est continue alors ils existent m et M dans $\mathbb{R}$ tels que : $f([a,b]) = [m,M]$, où $m = \min f(x)$ et $M = \max f(x)$ pour tout x de l'intervalle $[a,b]$
1) Si $m = M$ alors f est constante sur $[a,b]$ d'où $(\forall x \in]a,b[)\,(f'(x) = 0)$
2) Si $m \neq M$ (alors $m < M$) on a alors $f(a) > m$ ou $f(a) < M$.
a) Si $m < f(a)$ alors : il existe c dans] a,b[tel que : $f(c) = m$ $(\forall x \in]a,c[)\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = \dfrac{f(x)-m}{x-c} \leq 0$ Donc : $\lim\limits_{x \to c^-} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'_g(c) \leq 0$ D'autre part : $(\forall x \in]c,b[)$ $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = \dfrac{f(x)-m}{x-c} \geq 0$ Donc : $\lim\limits_{x \to c^+} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'_d(c) \geq 0$ et puisque f est dérivable en c alors : $f'_g(c) = f'_d(c) = 0$ b) Si $f(a) < M$ même démonstration.

Remarque

1 Il n'y a pas unicité du point c tel que $f'(c) = 0$.

2. Le théorème n'est plus vrai si f n'est pas dérivable pour tout x de $]\, a,b\, [$ (Exemple : la fonction f définie par $f(x) = |x|$ sur $[-1,1]$
3. Le théorème n'est plus vrai si f n'est pas continue sur $[a,b]$, pour tout x de l'intervalle $]\, a,b\, [$
4. Il n'y a pas unicité du point c tel que $f'(c) = 0$.

• Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2$ Montrer que f' s'annule au moins une fois sur $]0,1[$

Solution

on a : $f(0) = f(1) = 2$ Donc f une fonction continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,\, 1\, [$ et telle que : $f(0) = f(1)$. D'après le théorème de Rolle il existe un réel $c\, \in]a,b[$ tel que : $f'(c) = 0$
donc : f' s'annule au moins une fois sur $]0,\, 1\, [$

Application

Soit $f : R \to R$ la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{1 + \cos^2 x}$, Montrer que, pour tout $a \in R$, la fonctions f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a, a + 2\pi[$.

Solution :

on a : $f(a) = f(a + 2\pi)$ Donc f une fonction continue sur $[a, a + 2\pi]$, dérivable sur $]a, a + 2\pi[$ et telle que :$f(a) = f(a + 2\pi)$ D'après le théorème de Rolle il existe un réel $c \in\,]\, a, a + 2\pi\, [$ tel que : $f'(c) = 0$
donc : f' s'annule au moins une fois sur $]\, a, a + 2\pi[$

II Théorème des accroissement finis (T.A.F)

T Théorème

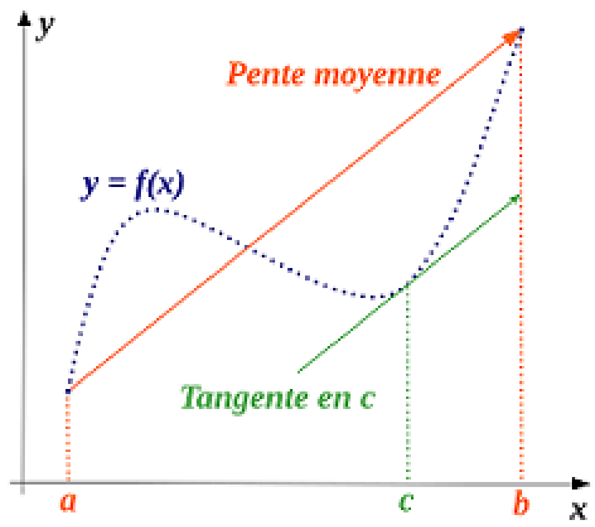
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ Alors il existe un réel $c\, \in]a,b[$ tel que :
$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Exemples

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ Considérons une fonction g tel que : $g(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ et puisque g est une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $],\, b[$ (somme de fonctions dérivables et continues) et on a : $g(a) = g(b) = 0$ D'après le théorème de Rolle il existe un réel $c\, \in]a,b\, [$ tel que : $g'(c) = 0$
On a : $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ Donc : $g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$

d'où : $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

Interprétation géométrique



Graphiquement le T.A.F signifie que si les deux conditions sont réalisées alors (C_f) admet au moins en un point d'abscisse c de $]a,b[$ une tangente parallèle à la droite (AB), avec $A(a,f(a))$ et $B(b,f'(b))$. La droite (AB) a pour pente $m=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $f'(c)$ est le coefficient directeur de la tangente à (c_f) an point d'abscisse C.

Remarque

Le T.A.F est une généralisation du théorème de Rolle, historiquement l'apparition du T.A.f a précède celle du Rolle. le TA.F qui revient au mathématicien français Joseph-Louis Lagrange est un corollaire du théorème de Rolle, on le démontre en utilisant ce dernier.

Application

1. Verifier que les conditions du théorème des accroissements finis sont vérifiées pour la fonction f sur I
   a. $f(x)=x^3-3x+12, \quad I=[1,4]$
   b. $f(x)=2\sqrt{x}+\sin x, \quad I=[0,\pi]$
2. Montrer que $\dfrac{1}{26}<\operatorname{Arctan}5-\operatorname{Arctan}4<\dfrac{1}{17}$.
3. On consideire la forction g difinie sur $\mathbb{R}$ pars $g(x)=x-\cos x$
   a. Etublir que l'equation $g|x|=0$ cudmet une uni que colution α dans l'intervalle $]\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}[$.
   b. Montrer qu'il existe $c\in]\alpha,\dfrac{\pi}{2}[$ tel que $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot g'(c)$

III Inégalité des accroissements finies I.A.F :

T Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ S'ils existent deux réels M et m tels que : $m \leq f'(x) \leq M \forall x \in]a;b[$ Alors : $m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$

Exemples

On a : f est fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ donc d'après le T. A.F il existe $c \in]a,b[$ tel que : $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et puisque $m \leq f'(x) \leq M$ $\forall x \in]a;b[$ alors : $m \leq f'(c) \leq M$ donc : $m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$ donc : $m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$

Corolaire

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et $k > 0$. si $\forall x \in]a,b[$,$|f'(x)| \leq k$ alors $|f(b)-f(a)| \leq k|b-a|$

Exemples

Soient a et b deux éléments de I Si $a = b$ l'inégalité est vraie. Si $a \neq b$ On a f est continue sur l'intervalle fermé de borne x et y et dérivable sur l'ouvert de borne a et b.donc, et d'après le T.A.F il existe c compris entre a et b tel que : $f(a)-f(b) = f'(c)(a-b)$ et puisque $c \in I$ Alors : $|f'(c)| \leq k$
donc : $|f(a)-f(b)| = |f'(c)||a-by| \leq k|a-b|$
D'où la preuve du corollaire.

• Exemple

En utilisant le T.A.F Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$ $|\sin x| \leq |x|$

Solution

Considérons une fonction f tel que : $f(x) = \sin x$ on a : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ Et $f'(x) = \cos x$ et $|f'(x)| = |\cos x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ Par application de T.A.F sur l'intervalle de borne 0 et $x([a,b]$ où $a = \inf(x,0)$ et $b = \sup(x,0))$; $|f(b)-f(a)| \leq 1|(b-a)|$
Donc : $|\sin x - \sin 0| \leq 1|(x-0)|$
D'où : $|\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Application

1. Montrer que $\forall (a,b) \in \left[\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{3}\right]^2$: $|\tan a - \tan b| \leq 4|a-b|$
2. On considère $f(x) = x \cdot \sin x, x \in \mathbb{R}$ Montrer que $\forall x,y \in [-4,4]; |f(y)-f(y)| \leq 5|x-y|$
3. Montrer que $\forall x \geqslant 0 \quad \frac{x}{1+x^2} \leq \operatorname{Arctan} x \leq x.$