



Puissance d'un nombre réel

1

Définition



Définition

Soit a un nombre réel et n un entier naturel non nul

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$$

la puissance n de a

$$\boxed{a^n}$$

l'exposant
la base

Remarque

- ▶ a^n se lit : a puissance n ou a exposant n
- ▶ $a^0 = 1$ avec ($a \neq 0$) et $a^1 = a$
- ▶ $0^n = 0$ avec ($n \neq 0$) et $1^n = 1$
- ▶ $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

EXEMPLES

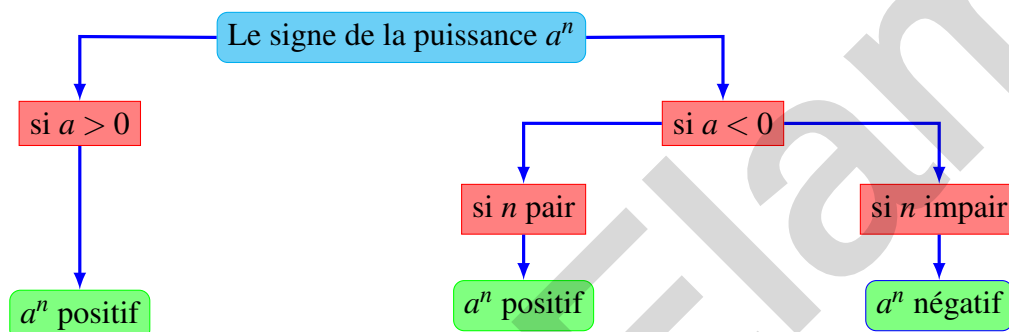
- ❖ $2022^0 = 1$
- ❖ $2023^1 = 2023$
- ❖ $0^{2022} = 0$
- ❖ $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$
- ❖ $\sqrt{2}^3 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
- ❖ $(-7)^3 = (-7) \times (-7) \times (-7) = -343$
- ❖ $(-\sqrt{2})^4 = (-\sqrt{2}) \times (-\sqrt{2}) \times (-\sqrt{2}) \times (-\sqrt{2}) = 4$

2 Le signe d'une puissance

a Proposition

Proposition

Soit a un nombre réel, et n un entier naturel non nul



EXEMPLES

- ▶ $\sqrt{7}^3 > 0$ car la base $\sqrt{7}$ est positif
- ▶ $(-\sqrt{11})^{124} > 0$ car l'exposant 124 est pair
- ▶ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{7}\right)^{11} < 0$ car la base $-\frac{\sqrt{3}}{7}$ est négatif et l'exposant 11 est impair
- ▶ $-\sqrt{5}^{12} < 0$ car la base est $\sqrt{5}$ et pas $-\sqrt{5}$

b Remarques importantes

Remarque

a est un nombre réel non nul, et n un entier naturel

- ▶ Si n est pair, alors : $(-a)^n = a^n$
- ▶ Si n est impair, alors : $(-a)^n = -a^n$

Application

Calculer :

$$\rightarrow a = (-4)^3$$

$$\rightarrow b = -2^4$$

$$\rightarrow c = -\left(\frac{-2}{3}\right)^3 \quad \rightarrow e = -(-\sqrt{5})^2$$

$$\rightarrow d = \left(\frac{-4}{5}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^3 \quad f = (-\sqrt{\sqrt{16}})^2$$

Solution

$$\rightarrow a = (-4)^3$$

$$= -4^3$$

$$= -64$$

$$\rightarrow b = -2^4$$

$$= -16$$

$$\rightarrow c = -\left(\frac{-2}{3}\right)^3$$

$$= -\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$= -\frac{8}{27}$$

$$\rightarrow d = \left(\frac{-4}{5}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^3 \quad \rightarrow e = -(-\sqrt{5})^2$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = -(\sqrt{5})^2$$

$$= \frac{16}{25} - \frac{1}{8} - 5 \quad \rightarrow f = (-\sqrt{\sqrt{16}})^2$$

$$= \frac{\frac{16}{25} - \frac{1}{8} - 5}{1} = (\sqrt{\sqrt{16}})^2$$

$$= \frac{103}{200} = (\sqrt{16})^2$$

$$= 4$$

**Puissance à exposant négatif****1****Définition****Définition**

Soient a et b deux nombres réels non nuls et n un nombre entier naturel

$$\rightarrow a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

$$\rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

EXEMPLES

$$\clubsuit \quad \sqrt{2}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}^1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 * \quad \left(\frac{-3}{\sqrt{5}}\right)^{-2} &= \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \\
 * \quad (3+\sqrt{2})^{-1} &= \frac{1}{3+\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{2}}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{3-\sqrt{2}}{3^2-\sqrt{2}^2} = \frac{3-\sqrt{2}}{9-2} = \frac{3-\sqrt{2}}{7}
 \end{aligned}$$

III Les opérations sur les puissances

1 Activités

Activité

- 1 Écrire les nombres suivants sous forme d'une puissance du nombre 2

$$A = 2^5 \times 2^3 ; \quad B = 16^5 ; \quad C = 8^3 \times 4^{32}$$

- 2 Écrire le nombre suivant sous forme $2^n \times 3^p$ avec n et p deux nombres entiers relatifs

$$D = \frac{8^2 \times 9^3}{3^5 \times 2^4}$$

Solution

- 1 Écrivons sous forme de puissance de 2

$$\begin{aligned}
 A &= 2^5 \times 2^3 = 2^{5+3} = 2^8 \\
 B &= 16^5 = (2^4)^5 = 2^{4 \times 5} = 2^{20} \\
 C &= 8^3 \times 4^{32} = (2^3)^3 \times (2^2)^{32} = 2^{3 \times 3} \times 2^{2 \times 32} = 2^{9+64} = 2^{73}
 \end{aligned}$$

- 2 Écrivons sous forme de $2^n \times 3^p$

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{8^2 \times 9^3}{3^5 \times 2^4} = \frac{(2^3)^2 \times (3^2)^3}{3^5 \times 2^4} = \frac{2^{3 \times 2} \times 3^{2 \times 3}}{3^5 \times 2^4} = \frac{2^6 \times 3^6}{3^5 \times 2^4} \\
 &= 2^{6-4} \times 3^{6-5} = 2^2 \times 3^1
 \end{aligned}$$

2 Propriétés

Propriété

Soient a et b deux nombres réels non nuls, et n et m deux nombres entiers relatifs

$$\Rightarrow a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$\Rightarrow a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

$$\Rightarrow \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\Rightarrow \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\Rightarrow (a^n)^m = a^{n \times m}$$

Remarque

- Si on a la même base, on garde la base
- Si on a le même exposant, on garde l'exposant

EXEMPLES

$$\Rightarrow a = \sqrt{5}^3 \times \sqrt{5}^{-7} = \sqrt{5}^{3+(-7)} = \sqrt{5}^{-4} = \frac{1}{\sqrt{5}^4} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{2}^3 \times \sqrt{2}^{-2} \times \sqrt{2}^{-1} = \sqrt{2}^{3-2-1} = \sqrt{2}^0 = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{5^8}{5^{11}} = 5^{8-11} = 5^{-3} \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

$$\Rightarrow d = \frac{\sqrt{7}^3}{\sqrt{7}^{-2}} = \sqrt{7}^{3-(-2)} = \sqrt{7}^{3+2} = \sqrt{7}^5 = \sqrt{7}^4 \times \sqrt{7} = (\sqrt{7}^2)^2 \times \sqrt{7} = 7^2 \times \sqrt{7} = 49\sqrt{7}$$

$$\Rightarrow e = (\sqrt{7}^2)^{-3} = \sqrt{7}^{2 \times (-3)} = \sqrt{7}^{-6} = \frac{1}{\sqrt{7}^6} = \frac{1}{(\sqrt{7}^2)^3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343}$$

$$\Rightarrow f = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}^4\right)^2 = \left(\left(\sqrt{\frac{3}{2}}^2\right)^2\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}^2\right)^{2 \times 2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2 \times 2} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$$

$$\Rightarrow g = \sqrt{5}^3 \times \sqrt{7}^3 = (\sqrt{5} \times \sqrt{7})^3 = \sqrt{5 \times 7}^3 = \sqrt{35}^3 = \sqrt{35}^2 \times \sqrt{35} = 35\sqrt{35}$$

$$\Rightarrow h = 3^{-2} \times \sqrt{3}^{-2} \times \sqrt{2}^{-2} = (3\sqrt{3} \times \sqrt{2})^{-2} = (3 \times \sqrt{6})^{-2} = \frac{1}{(3\sqrt{6})^2} = \frac{1}{3^2 \sqrt{6}^2} = \frac{1}{9 \times 6} = \frac{1}{54}$$

$$\Rightarrow i = \frac{\sqrt{45}^3}{\sqrt{5}^3} = \left(\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}\right)^3 = \sqrt{\frac{45}{5}}^3 = \sqrt{\frac{9 \times 5}{5}}^3 = \sqrt{9}^3 = 3^3 = 27$$

$$\Rightarrow j = \frac{25^{-2}}{15^{-2}} = \left(\frac{25}{15}\right)^{-2} = \left(\frac{5 \times 5}{3 \times 5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$$

3

Exercice d'application

Application

Soient a et b deux nombres réels non nuls et $a \neq 3$
Simplifier ce qui suit :

$$\Rightarrow A = \frac{a^2 \times (a^5)^3}{(a \times a^2)^4}$$

$$\Rightarrow B = \frac{a^{-5} \times b^{-3} \times a^{-2}}{a^3 \times (b^{-2})^3}$$

$$\Rightarrow C = \left[1 + \left(\frac{3-a}{1+a} \right)^{-1} \right]^{-1} =$$

Solution

Simplifions les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= \frac{a^2 \times (a^5)^3}{(a \times a^2)^4} \\ &= \frac{a^2 \times a^{5 \times 3}}{a^4 \times a^{2 \times 4}} \\ &= \frac{a^2 \times a^{15}}{a^4 \times a^8} \\ &= \frac{a^{2+15}}{a^{4+8}} \\ &= \frac{a^{17}}{a^{12}} \\ &= a^{17-12} \\ &= a^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow B &= \frac{a^{-5} \times b^{-3} \times a^{-2}}{a^3 \times (b^{-2})^3} \\ &= \frac{a^{-5+(-2)} \times b^{-3}}{a^3 \times b^{(-2) \times 3}} \\ &= \frac{a^{-7} \times b^{-3}}{a^3 \times b^{-6}} \\ &= \frac{a^{-7-3} \times b^{-3+6}}{a^{-10} b^3} \\ &= a^{-10} b^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C &= \left[1 + \left(\frac{3-a}{1+a} \right)^{-1} \right]^{-1} \\ &= \left(1 + \frac{1+a}{3-a} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{3-a+1+a}{3-a} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{4}{3-a} \right)^{-1} \\ &= \frac{3-a}{4} \end{aligned}$$

IV L'écriture scientifique

1 Puissance de 10

Proposition

Soit n un nombre entier naturel

$$10^n = 1 \underbrace{00 \dots 00}_{n \text{ zeros}}$$

$$10^{-n} = \underbrace{0.00 \dots 00}_n 1$$

EXEMPLES

$$\Rightarrow 10^4 = 10000$$

$$\Rightarrow 10^7 = 10000000$$

$$\Rightarrow 10^{-1} = 0.1$$

$$\Rightarrow 10^{-2} = 0.01$$

$$\Rightarrow 10^{-3} = 0.001$$

$$\Rightarrow 10^{-5} = 0.00001$$

2 Écriture scientifique

Définition

Soit a un nombre décimal et n un nombre entier relatif

L'écriture $x = a \times 10^n$ ou $x = -a \times 10^n$ s'appelle écriture scientifique de x avec $1 \leq a < 10$

EXEMPLES

$$\Rightarrow a = 3452 = 3.452 \times 10^3$$

$$\Rightarrow b = 0.00000234 = 2.34 \times 10^{-6}$$

$$\Rightarrow c = 678.25 \times 10^5 = 6.7825 \times 10^2 \times 10^5 = 6.7825 \times 10^{2+5} = 6.7825 \times 10^7$$

$$\Rightarrow d = -0.000981 \times 10^{-9} = -9.81 \times 10^{-4} \times 10^{-9} = -9.81 \times 10^{-4-9} = -9.81 \times 10^{-13}$$

$$\Rightarrow e = -24.5 \times 10^{-11} \times 1.2 \times 10^3 = -24.5 \times 1.2 \times 10^{-11} \times 10^3 = -29.4 \times 10^{-11+3} = -2.94 \times 10^{\times 10^{-8}} = -2.94 \times 10^{1-8} = -2.94 \times 10^{-7}$$

$$\Rightarrow f = \frac{25.5 \times 10^{-16}}{0.05 \times 10^3} = \frac{25.5}{0.05} \times 10^{-16-3} = 510 \times 10^{-19} = 5.1 \times 10^2 \times 10^{-19} = 5.1 \times 10^{2-19} = 5.1 \times 10^{-17}$$

$$\Rightarrow g = -113 \times 10^5 + 7.2 \times 10^7 = -113 \times 10^5 + 7.2 \times 10^2 \times 10^5 = -113 \times 10^5 + 7.2 \times 100 \times 10^5 = -113 \times 10^5 + 720 \times 10^5 = (-113 + 720) \times 10^5 = 607 \times 10^5 = 6.07 \times 10^2 \times 10^5 = 6.07 \times 10^{2+5} = 6.07 \times 10^7$$

Méthode

Pour trouver l'écriture scientifique d'un nombre réel, on glisse la virgule jusqu'on trouve un nombre entre 1 et 10.

✓ Glissement à droite → Exposant négatif

✓ Glissement à gauche → Exposant positif