Généralités sur les fonctions numériques(Rappel et compléments)

Série d'exercices

Exercice

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$.

1. Déterminer D_f et étudier la parité de la fonction f
2. Vérifier que : $(\forall x\in D_f);(f(x))^2=4+\dfrac{16}{x^2-4}$
3. Montre que pour tout x et y de D_f tel que $x\neq y$:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{-16(x+y)}{(x^2-4)(y^2-4)}\times\frac{1}{f(x)+f(y)}$$

4. Étudier la monotonie de la fonction f sur $]2;+\infty$ et sur $[0;2[$
5. Donner le tableau de variations de f sur D_f

Exercice

On considère la fonction f définie par $f(x)=x(1-x)$

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$:$f(x)\leq\frac{1}{4}$.
2. En déduire que la fonction f admet un maximum en $x=\frac{1}{2}$.
3.
   a. Démontrer que $f(x)=\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2$.
   b. Écrire f comme composée de fonction carrée et de deux fonctions affines dont on donnera le sens de variation.
   c. En déduire le sens de variation de f.

Exercice

Déterminer $g\circ f$ dans chacun de cas suivants :

1. $g(x)=3x+2$ et $f(x)=x^2-1$
2. $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ et $f(x)=x^2$
3. $g(x)=x^2+2x+1$ et $f(x)=\sqrt{x}$

4 $g(x) = \dfrac{x-1}{2-x}$ et $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$

Exercice

Soient f et g les fonctions définies par : $f(x) = -2x+1$ et $g(x) = \dfrac{1-2x}{x-1}$

1 Donner le tableau de variation de la fonction f et celui de la fonction g.

2 Déterminer la monotonie de la fonction gof sur les deux intervalles :$]-\infty,0[$;et $]0,+\infty[$

Exercice

Soient f et g les fonctions définies par : $g(x) = \dfrac{x}{2x+4}$ et $f(x) = (x+1)^2$

1 Donner le tableau de variations de la fonction f et celui de g .

2 On pose :$\forall x \in \mathbb{R}: \quad h(x) = (gof)(x)$

a Monter que $\forall \in \mathbb{R}: \quad h(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{2x^2+4x+6}$

b Déterminer la monotonie de la fonction h sur les intervalles suivants : $[-\infty;-1]$ et $[-1;+\infty[$.

Exercice

Soient f et g deux fonctions définies par :$f(x) = x^2-2x+3$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$

1 a Donner les tableaux de variations des fonctions f et g .

b Représenter les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

c Déterminer graphiquement $g([-1;0])$ et $g([0;+\infty[)$

2 Soit h la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par : $h(x) = x+4-2\sqrt{x+1}$

a Vérifier que :$(\forall x \in [-1;+\infty[);h(x) = (f \circ g)(x)$

b Étudier la monotonie de la fonction h sur les intervalles $[0;+\infty[$ et $[-1;0]$ à partir de celle de f et g. Puis déduire les extremums de h sur l'intervalle $[-1;+\infty[$ s'ils existent .

c Montrer que : $(\forall a \in [-1;+\infty[);\sqrt{a+1}-\sqrt{a} \leq \dfrac{1}{2}$

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2-|x|} & ;|x|\leq 2\\ \dfrac{-2|x|+4}{|x|+1} & ;|x|>2\end{cases}$;

1. Montrer que f est paire et que $A(2;0)\in(C_f))$.
2. Étudier la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty$ puis donner son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
3. a. Montrer que f est minorée par 2 sur $\mathbb{R}$. Est-ce que 2 est un minimum de la fonction f ?
   b. Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$
4. Représenter la courbe représentative (C_f) de la fonction g dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$
5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :$g(x)=2+\frac{1}{x}$
   Représenter la courbe représentative (C_g) de la fonction g dans le même repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$
6. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $h(x)=(f\circ g)(x)$
   a. Déterminer $h(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$
   b. Étudier la monotonie de la fonction h sur $\mathbb{R}^+$ à partir de celle des fonctions f et g
   c. Étudier le signe de h

Exercice

1. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :$4[\sqrt{x}]+1=x$
   b. Montrer que : $()\forall x\in\mathbb{R})$; $[x+\frac{1}{2}]=[2x]-[x]$
   En déduire la valeur de la somme suivante :$S_n=\sum_{k=O}^{n}[\frac{x+2^k}{2^{k+1}}]$
2. Soit f la fonction définie par : $f(x)=(x-E(x))(E(x)-x+2)$
   a. Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.
   b. Montrer que f et périodique de période $T=2$.
   c. Calculer $f(x)$ pour tout $x\in[0;1[$.
   d. Représenter la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0;4]$

([.] **désigne la partie entier**)