Généralités sur les fonctions numériques(Rappel et compléments)

Les orientations pédagogiques	Capacités attendues
On présentera ce chapitre à partir d'exemples de révisions avec quelques compléments - On construira les courbes représentatives des fonctions de références qui ont été étudiées ainsi que les fonctions : $x \longmapsto \sqrt{x+a}$, $x \longmapsto ax^3$, $x \longmapsto E(x)$ et les fonctions de la forme $f+\lambda$ de la même manière que celle utilisée aux au niveau du tronc commun ; - Les fonctions de type $x \longmapsto E(f(x))$ et de type $x \longmapsto f(E(x))$ sont hors programme ; - On habituera les élèves à déterminer les variations d'une fonction numérique à partir de sa courbe représentative tout en accordant de l'importance à la construction des courbes ; - On traitera la résolution graphique d'équations et d'inéquations de la forme : $f(x)=c$; $f(x) \leq c$; $f(x)=g(x)$; $f(x) \leq g(x)$; $f(x)<g(x)$; - On utilisera dans la limite de ce qui est disponible les calculatrices et les logiciels pour étudier des fonctions ; - Il est souhaitable de traiter des situations choisies à partir des disciplines de la spécialité .	- Comparer deux expressions en utilisant différentes techniques ; - Déduire les variations ou les extrémums ou le signe d'une fonction à partir de sa représentation graphique ou à partir de son tableau de variation ; - Déterminer les variations des fonctions $f+\lambda$ et λf à partir des variations de la fonction f ;- Discuter les solutions d'une équation de type $f(x)=c$ et $f(x)=g(x)$ à partir de la représentation graphique ; - Etude d'équations et d'inéquations en utilisant et en représentant les fonctions .

Les prés-requis	Les extensions
Généralités sur les fonctions en TCS	L'étude des fonctions

I Fonction majorée-Fonction minorée-Fonction bornée

Activité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

1. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R});\ f(x) < 1$
2. L'équation $f(x) = 1$ admet-elle une solution dans $\mathbb{R}$?
3. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R});\ f(x) \geq 0$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$
5. En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R});\ 0 \leq f(x) < 1$

Définition

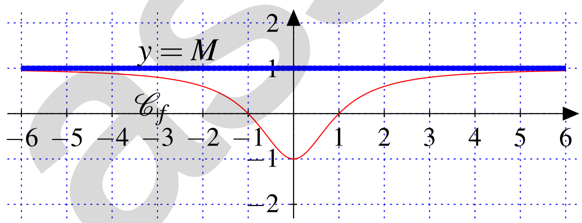
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de D_f .

- On dit que f est majorée sur I s'il existe un réel M tel que : $(\forall x \in I), f(x) \leq M$.Le réel M s'appelle un **majorant** de f sur I.
- On dit que f est minorée sur I s'il existe un réel m tel que : $(\forall x \in I), f(x) \geq m$.Le réel m s'appelle un **minorant** de f sur I.
- On dit que f est bornée sur I s'il existe deux réels M et m tel que : $(\forall x \in I), m \leq f(x) \leq M$

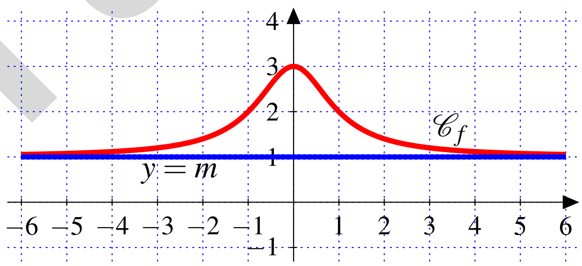
Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de D_f.
La fonction f est bornée sur l'intervalle I si et seulement s'il existe un réel positif M tel que :$(\forall x \in I), |f(x)| \leq M$

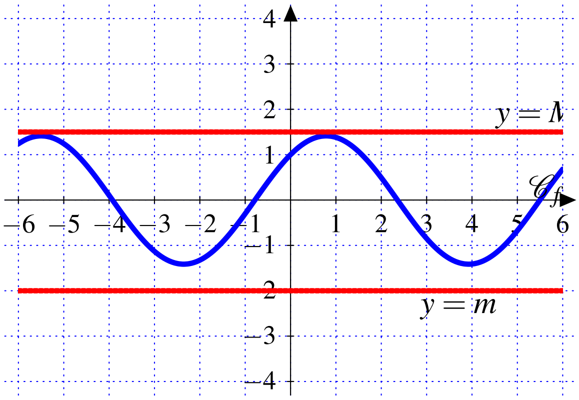
• Exemple



• La courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de la droite d'équation $y := M$.



• La courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la droite d'équation $y := m$.



• La courbe $\mathscr{C}_f$ est inclus dans la barre définie par les droites d'équations $y = m$ et $y = M$

Application

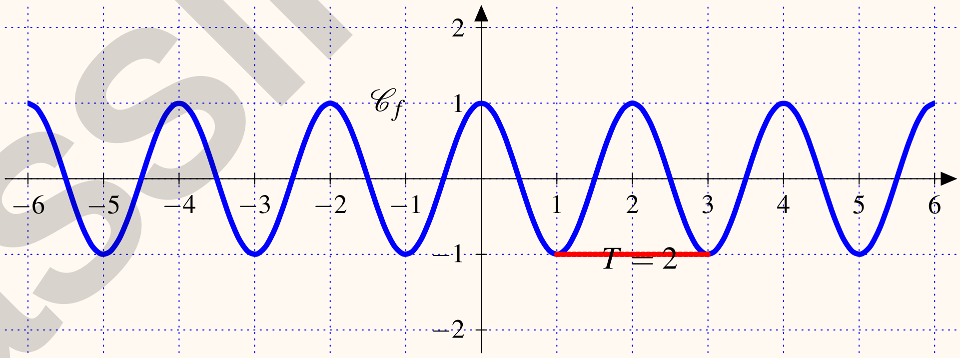
On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3}$

1. Montrer que f est majorée par $\frac{3}{2}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que g est minorée par 1 sur $\mathbb{R}$.

II Fonction périodique

Activité

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la courbe représentative ci-dessous :



   a. Vérifier que : $f(1) = f(3)$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right)$ et $f(1) = f(3)$;
   b. Quelle est la relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$ où $x \in \mathbb{R}$?
2. La fonction représentée ci-dessus est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(\pi x)$.
   a. Confirmer les résultats de la question **1-a)**.
   b. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$; $(x-2) \in \mathbb{R}$ et $(x+2) \in \mathbb{R}$ et $f(x-2) = f(x+2) = f(x)$.**On dit dans ce cas que la fonction f est périodique de période $T = 2$**

Définition

Une fonction f est dite périodique de période T si et seulement si , pour tout réel $x \in D_f$, on a : $(x+T) \in D_f \wedge f(x+T) = f(x)$

Propriété

- Si la fonction f est périodique de période T alors : $(\forall x \in D_f)(\forall k \in \mathbb{Z}), f(x+kT) = f(x)$.
- Posons : $I_0 = [x_0; x_0+T[$ et $I_k = [x_0+kT; x_0+(k+1)T[$ tels que $x_0 \in D_f$ et $k \in \mathbb{Z}$ et soient (C_0) la courbe de la fonction f sur l'intervalle I_0 et (C_k) sa courbe sur l'intervalle I_k dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On a :
  - (C_k) est l'image de (C_0) par la translation de vecteur $kT.\vec{i}$.
  - La fonction f a le même sens de variation sur I_0 et I_k.

Remarque

Si f est définie sur D_f et périodique de période T alors il suffit de l'étudier sur $D_f \cap [0;T]$ ou $D_f \cap \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$.

Exemple

- La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est périodique de période $T = 2\pi$;
- La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est périodique de période $T = 2\pi$;
- La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est périodique de période $T = \pi$.

Application

Soit f une fonction périodique de période $T = 3$ et définie sur $\left[0; \dfrac{3}{2}\right]$ par : $f(x) = x^2 - x$.

1. Calculer $f(2020)$ et $f(1441)$.
2. Déterminer l'expression $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

Application

1. Soit a un réel strictement positif. Montrer que les fonctions $x \mapsto \cos(ax)$ et $x \mapsto \sin(ax)$ sont périodiques et de période $T = \frac{2\pi}{a}$.
2. Déterminer la période de chacune des fonctions suivantes : $f : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$ et $g : x \mapsto \sin(2x)$

III Extremums d'une fonction

Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de D_f et $x_0 \in I$.

- $f(x_0)$ est le **minimum** de f sur I si et seulement si : $(\forall x \in I), f(x) \geq f(x_0)$ et on écrit : $f(x_0) = \min_{x \in I} f(x)$
- $f(x_0)$ est le **maximum** de f sur I si et seulement si : $(\forall x \in I), f(x) \leq f(x_0)$ et on écrit : $f(x_0) = \max_{x \in I} f(x)$.
- Le maximum et le minimum sont appelés les **extremums** de la fonction f.

Application

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

1. Montrer que $\frac{1}{2}$ est une valeur maximale de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $-\frac{1}{2}$ est une valeur minimale de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

IV Monotonie d'une fonction

Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle I. ▷ f est croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall (a;b) \in I^2), a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.

▷ f est décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall (a;b) \in I^2), a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$.

▷ f est strictement croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall (a;b) \in I^2), a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.

▷ f est strictement décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall (a;b) \in I^2), a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.

▷ f est monotone sur I si elle est croissante ou décroissante sur I.

▷ f est strictement monotone sur I si elle est strictement croissante ou décroissante sur I.

1 Taux de variations :

Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et soient a et b deux nombres distincts de l'intervalle I.

Le nombre $T(a;b) = \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$ s'appelle le taux de variation de la fonction f entre a et b .

Propriété

Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

- f est croissante sur I si et seulement si, quels que soient les nombres distinct a et b de I on a : $T(a;b) \geq 0$
- f est strictement croissante sur I si et seulement si, quels que soient les nombres distinct a et b de I on a : $T(a;b) > 0$
- f est décroissante sur I si et seulement si, quels que soient les nombres distinct a et b de I on a : $T(a;b) \leq 0$
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si, quels que soient les nombres distinct a et b de I on a : $T(a;b) < 0$

Propriété

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f symétrique par rapport à 0 et soient $I \subset D_f \cap \mathbb{R}^+$ et I' son symétrique par rapport à 0.

- Soit f paire, on a : si f est croissante sur I alors f est décroissante sur I' et si f est décroissante sur I alors f est croissante sur I'
- Soit f impaire, on a : si f est croissante sur I alors f est croissante sur I' et si f est décroissante sur I alors f est décroissante sur I'

Proposition (Sens de variation de la fonction $f + \lambda$)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et λ un réel. Si f est monotone sur I alors f et $f + \lambda$ ont même sens de variation sur I.

Proposition (Sens de variation de la fonction λf)

Soit f une fonction définie et monotone sur un intervalle I et λ un réel.

- Si $\lambda > 0$ alors les fonctions f et λf ont même sens de variation sur I.
- Si $\lambda < 0$ alors les fonctions f et λf ont des sens de variation contraires sur I.

Application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2|x| + 3$

1. Montrer que la fonction f est paire.
2. Montrer que la fonction f est minorée par le nombre 2.
3. Montrer que la fonction f est croissante sur $]1; +\infty[$ et décroissante sur $[0; 1]$.
4. En déduire les variation de la fonction f sur les intervalles $]-\infty; -1]$ et $]-1; 0]$.

V Composition de deux fonctions

Activité

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x-1}$.

1. Déterminer D_f et D_g puis donner le tableau de variations de f et celui de g.
2. Calculer $h(x) = g\left(f(x)\right)$
3. Déterminer D_h puis donner le tableau de variations de h.
4. Comparer les monotonies des fonction f, g et h.

Définition

Soit f une fonction définie sur D_f et g une fonction définie sur D_g. On pose : $D = \{x \in \mathbb{R}/x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$. La fonction h définie sur D par $h(x) = g\left(f(x)\right)$ est appelée fonction composée de f suivie de g notée $g \circ f$.

Remarque

$D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R}/x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$ ou $x \in D_{g\circ f} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - 1$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 3$. Définir $g \circ f$ et $f \circ g$. Sont-elles égales ?

- $g \circ f$ est définie sur $[0;+\infty[$ par $g \circ f(x) = g(f(x)) = (\sqrt{x} - 1)^2 + 3 = x - 2\sqrt{x} + 4$
- $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2+3} - 1$
- $g \circ f$ et $f \circ g$ ne sont pas égales car elles n'ont pas le même ensemble de définition.On peut aussi remarquer que $g \circ f(0) \neq f \circ g(0)$

Propriété

Soit f une fonction définie et monotone sur un intervalle I. Soit g une fonction définie et monotone sur un intervalle J et telle que pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$.

- Si f et g ont même sens de variation alors $g \circ f$ est croissante sur I.
- Si f et g ont des sens de variation contraires alors $g \circ f$ est décroissante sur I.

Application

1. Ecrire, sous forme d'une composition de deux fonctions, les fonctions suivantes : $f(x) = (x-1)^2$; $g(x) = \sqrt{2-5x}$; $h(x) = 3 - \frac{1}{(2x-1)^2}$.
2. Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = -2x + 1$ et $g(x) = \dfrac{1-2x}{x-1}$

a Donner le tableau de variation de la fonction f et celui de g .

b Déterminer la monotonie de la fonction $g \circ f$ sur les intervalles : $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$

VI Représentation graphique des fonctions $x \longmapsto \sqrt{x+a}$ et $x \longmapsto ax^3$ et $x \longmapsto E(x)$

Définition

La courbe représentative de la fonction f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ où x parcourt le domaine de définition D de la fonction f.Elle est souvent notée $\mathscr{C}_f$
L'équation de cette courbe représentative est : $y = f(x)$.
La courbe représentative de la fonction carrée s'appelle une parabole et celle de la fonction inverse une hyperbole.

1 Étude de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x+a}$ où $a \in \mathbb{R}$

Activité

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x+a}$ où $a \in \mathbb{R}$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1 Déterminer D_f.

2 Étudier les variations de f.

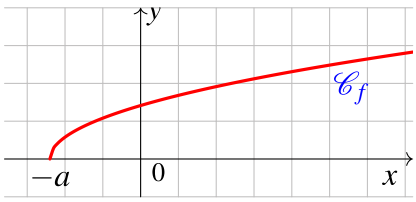
3 Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ pour $a = 0$ et pour $a = 2$.
(On remarque que la courbe $\mathscr{C}_2$ est une image de $\mathscr{C}_0$ par la translation de vecteur $-2\vec{i}$)

Propriété

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+a}$.

- L'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f = [-a; +\infty[$.
- La fonction f est croissante sur D_f.
- Tableau de variations et représentation graphique :

x	$-a$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$



2 Étude de la fonction $x \longmapsto ax^3$ où $a \in \mathbb{R}^*$

Activité

Soit f la fonction définie par : $f(x) = ax^3$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Étudier la parité de f.
2. Étudier les variations de f.
3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ pour $a = 1$.

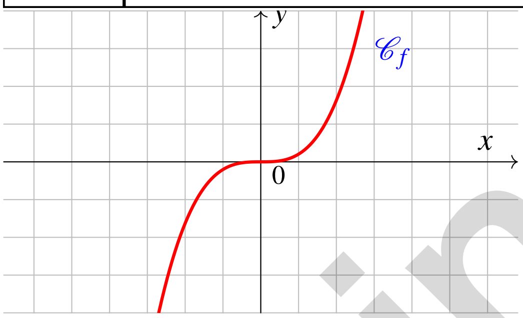
Propriété

Soit f la fonction par $f(x) = ax^3$ tel que $a \neq 0$.

- L'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f = \mathbb{R}$.
- La fonction f est impaire.
- Tableau de variations et représentation graphique :

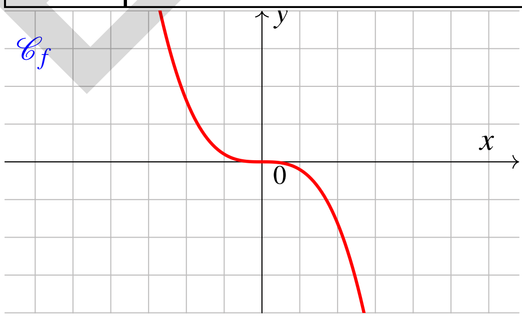
Si $a > 0$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$



Si $a < 0$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$



3 Étude de la fonction $x \longmapsto E(x)$

Activité

Soit x un réel. Compléter le tableau suivant on détermine le nombre entier relatif p ($p \in \mathbb{Z}$) tel que $p \leq x < p+1$

x	$4,5$	$0,7$	$-0,3$	$-4,1$
p				

(Le nombre entier relatif s'appelle la partie entière relative du nombre réel x, on note $p = E(x)$ ou encore $p = [x]$)

Définition

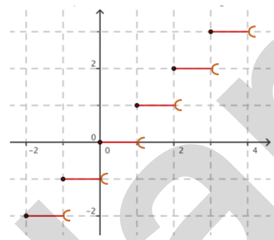
Soit x un nombre réel. Le nombre entier relatif p qui vérifie $p \leq x < p+1$ s'appelle la partie entière relative du nombre réel x, on note $p = E(x)$ ou encore $p = [x]$.

• Exemple

$E(5)=5$; $E(-3.2)=-4$; $E(6.9)=6$; $E(\frac{7}{3})=2$; $E(-\frac{7}{3})=-3$

Propriété

- $\forall x \in [p;p+1[$; $E(x)=p$
- $\forall x \in \mathbb{Z}$; $E(x)=x$
- $\forall x \in \mathbb{R}$; $E(x) \leq x < E(x)+1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$; $E(x+k)=E(x)+k$
- $\forall x \in \mathbb{R}$; $x-1 < E(x) \leq x$
- C-centre, La représentation graphique de la fonction $x \longmapsto E(x)$:



Application

Soit f est la fonction définie par $f(x)=2x-E(x)$
On considère les intervalles I_k tel que $I_k=[k;k+1[$ avec $k \in \mathbb{Z}$

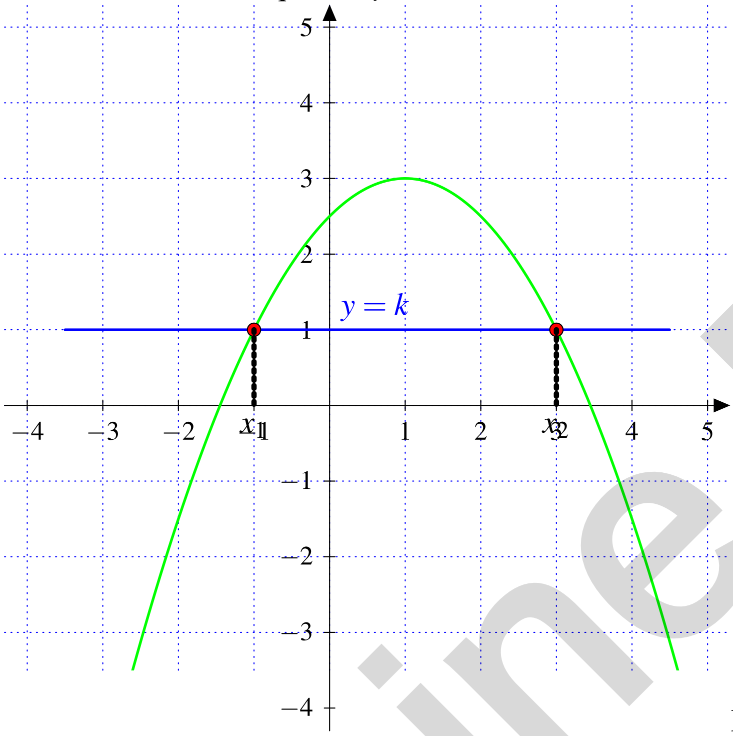
1. Déterminer l'expression de $f(x)$ sur I_k
2. Construire C_0 la courbe de f sur $I_0=[0;1[$
3. Déduire les courbes C_k de f sur $I_k=[k;k+1[$

VII Comparaison de deux fonctions

1 Résolution d'une équation

a Résolution d'équation $f(x) = k$

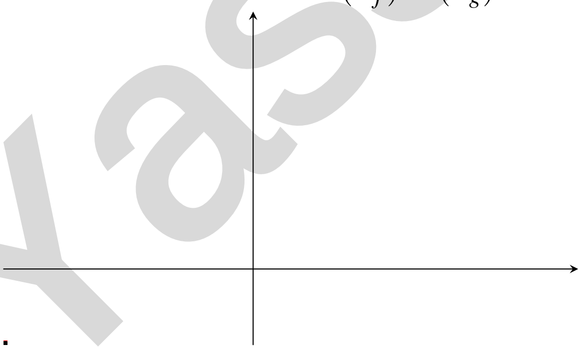
On trace la droite d'équation $y = k$ et on lit les abscisses des points d'intersection avec la courbe.



Donc l'ensemble des solutions de cette équation est : $S = \{x_1; x_2\}$

b Résolution d'équation $f(x) = g(x)$

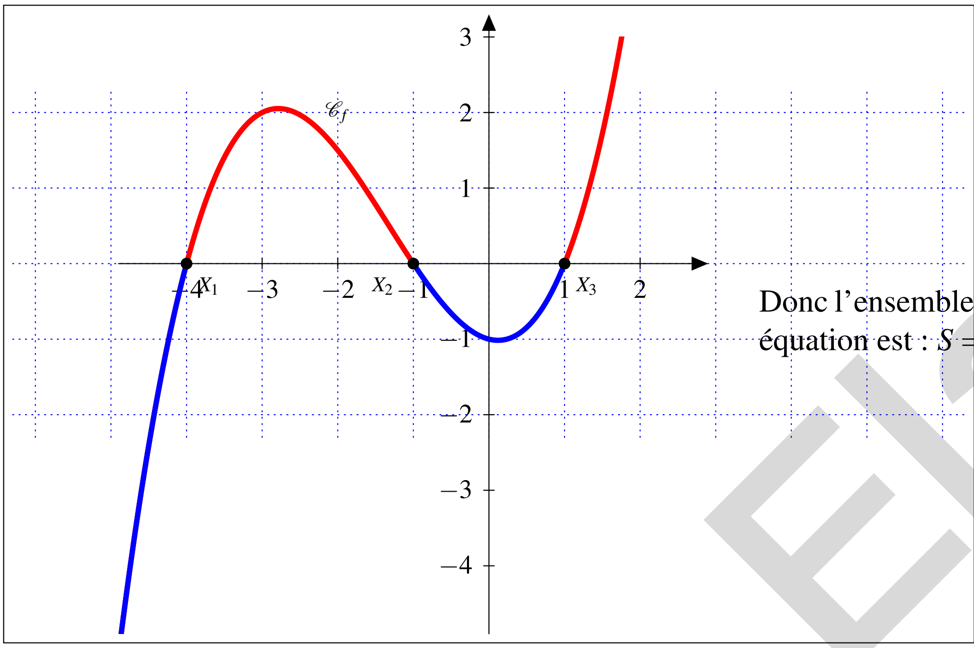
On trace les deux courbes (C_f) et (C_g) et on lit les abscisses des points d'intersection.



Donc l'ensemble des solutions de cette équation est : $S = \{x_1; x_2\}$

2 Résolution d'une inéquation

a Résolution d'inéquation $f(x) > 0$



Donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est : $S =]X_1; X_2[\cup]X_3; +\infty[$

b Résolution d'inéquation $f(x) \leq g(x)$

Activité

Soit f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x + \dfrac{1}{x+1}$ et $g(x) = x$.

1. Déterminer D_f et D_g.
2. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
3. Comparer f et g.

Définition

Soient f et g deux fonctions. On dit que f et g sont égales et on note $f = g$ si :$D_f = D_g = D$ et $(\forall x \in D) \qquad f(x) = g(x)$

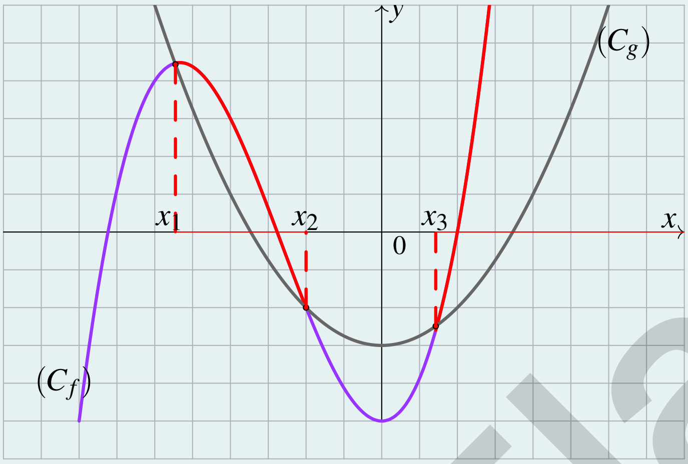
Exemple

Les fonctions u et v sont-elles égales ?

1. u et v sont définies par $u(x) = 3 - \dfrac{2}{x+1}$ et $v(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$
2. u et v sont définies par $u(x) = x$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{x}$

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I tel que $I \subset D_f \cap D_g$.
On dit que f est supérieure ou égale à g sur I si et seulement si : $(\forall x \in I)\ \ f(x) \geq g(x)$



On a : $\forall x \in [x_1;x_2] \cup [x_3;+\infty[;\ f(x) \geq g(x)$
Autrement dit, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ est : $[x_1;x_2] \cup [x_3;+\infty[$
l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ est : $]x_1;x_2[\cup]x_3;+\infty[$

Remarque

L'inéquation $f(x) \leq g(x)$ est un cas particulier d'inéquation $f(x) \leq g(x)$ avec g la fonction constante $g(x) = k$

Application

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 4x + 5$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ et $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. Donner le tableau de variations de f et celui de g.
2. Calculer $f(3)$ et $g(3)$.
3. Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans le même repère.
4. Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) \leq f(x)$.
5. Montrer que : $\forall x \in]3;+\infty[; g(x) < f(x) \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 8x - 6 > 0$
6. En déduire les solutions de l'inéquation : $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 > 0$ dans l'intervalle $]1;+\infty[$
7. Résoudre, algébriquement, dans $]1;+\infty[$ l'inéquation : $P(x) > 0$ où $P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6$. **(On donne** $P(3) = 0$**)**