

Exercice

Étudier la dérivabilité de f au point a dans chacune des cas suivantes

- 1 $\begin{cases} f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right); x \neq 0 & \text{et } a = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$
- 2 $\begin{cases} f(x) = \sin^2 x E\left(\frac{1}{x}\right); x \neq 0 & \text{et } a = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$
- 3 $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}; x \neq 1 & \text{et } a = 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$
- 4 $\begin{cases} f(x) = |x^2 - x| & ; x < 0 \\ f(0) = x\sqrt{x} & ; x \geq 0 \end{cases} \quad \text{et } a = 0$

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ ax^2 + bx + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

- 1 déterminer la relation entre a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^+$
- 2 déterminer a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}^+$

Exercice

Calculer la dérivée de f dans chacune des cas suivantes : 1) $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}$ 2) $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$ 3)

$f(x) = (1 + \sin(2x))^3$ 4) $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x+2}}$ 5) $f(x) = \tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

6) $f(x) = \tan(\sin x)$ 7) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt[3]{3x}}$

8) $f(x) = \sin(\arctan(\pi\sqrt{x}))$

Exercice

- 1 Soit f une fonction dérivable en a .

calculer la limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$

- 2 soit f une fonction dérivable au point $a = 2$ Telle que $f(2) = 0$ et $f'(2) = 3$.
Calculer les limites

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(\sqrt{x+2})}{x-2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f\left(\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)}{x-2}$$

Exercice

On pose $I = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ et soient x et y deux éléments de I tels que $x < y$

1 montrer que :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x) \leq \sin y - \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(y-x)$$

2 déduire que $\frac{\sqrt{2}}{12} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{\pi} \leq \frac{\sqrt{3}}{12}$

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = x \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)$$

1 Étudier la dérivabilité à droite au point 0

2 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3 a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b Étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

4 Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation

5 Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle I à déterminer

6 Tracer (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans un même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Exercice

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

1 Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $] -2; 2[$

2 On pose g la bijection réciproque de f

- a Montrer que g est dérivable en 1 et calculer $g'(1)$
- b Étudier la dérivabilité de g sur $] -2; 2[$
- c Montrer que $g'(x) = \frac{2-x}{\sqrt{(g(x))^2 + g(x) + 1}}$ pour tout $x \in] -2; 2[$

Exercice

Soit f la fonction définie sur $I =]0; \pi[$ par $f(x) = \cos(x)$

- 1 a) Montrer que f est une bijection de I vers un intervalle J à déterminer
- b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et que $(\forall x \in J) : (f^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- 2 Soit φ la fonction définie par

$$\varphi(x) = f^{-1}\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)$$

- a Montrer que $D_\varphi = [0; +\infty[$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$
- b Étudier la dérivabilité de φ à droite au point 0 et interpréter géométriquement le résultat
- c Montrer que φ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $(\forall x \in]0; +\infty[) : \varphi'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}(x+1)}$
- d Dresser le tableau de variation de φ puis tracer (C_φ) dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Exercice

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ et dérivable sur $]0; 1[$ tel que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$

- 1 Montrer que $\exists c \in]0; 1[: f'(c) = 2c$
- 2 Montrer que la courbe (C_f) admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$
- 3 Montrer que $(\exists c \in]0; 1[) : 2cf'(c) = \sqrt{c}$

Exercice

- 1 a et b deux nombre réels tels que $0 < a < b$;
Montrer que :

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan(b) - \arctan(a) < \frac{b-a}{1+a^2}$$

- 2 En déduire que $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$

Exercice

- 1 En utilisant le T.A.F, montrer que

$$(\forall x \in]0; +\infty[) \quad \frac{1}{1+x^2} < \frac{\arctan(x)}{x} < 1$$

- 2 En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) - x}{x^2}$

Exercice

Partie A) : On considère la fonction : $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 1)$

- 1 Montre que $(\exists! \alpha \in]-\frac{1}{2}, 0[), \quad f(\alpha) = \alpha$
- 2 Montre que $(\forall x \in]-\frac{1}{2}, 0[), |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$
- 3 On déduire que : $(\forall (x, y) \in]-\frac{1}{2}, 0[^2), \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4}|x - y|$

Partie B) : On considère la suite : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

- 1 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad -\frac{1}{2} < u_n \leq 0$
- 2 Montrer que
- $$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$$
- 3 En déduire que (u_n) est convergente, et calculer sa limite.

Exercice

Soit f définie par $\begin{cases} f(x) = x + 2 - 3\sqrt[3]{x^2 + x} \text{ si } x \leq -1 \\ f(x) = \frac{\arctan(x+1)}{x+1} \text{ si } x > -1 \end{cases}$

- 1 Étudier les branches infinies de (C_f)

- 2 Étudier la continuité en $x_0 = -1$
- 3 Étudier la dérivabilité à gauche au point $x_0 = -1$ et interpréter géométriquement le résultat.
- 4 Montrer que $(\forall t > 0) \quad t - \frac{t^3}{3} < \arctan(t) < t$
 - a Étudier la dérivabilité à droite au point $x_0 = -1$ et interpréter géométriquement le résultat
- 5 a- Montrer que f est dérivable sur $] -1; +\infty[$ et sur $] -\infty; -1[$ puis calculer $f'(x)$
 - a Étudier les variations de la fonction définie par $g(t) = \frac{t}{1+t^2} - \arctan(t)$ puis déterminer son signe
 - b Dresser le tableau de variation de f
- 6 Tracer la courbe de f

Exercice

- 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (\sin(x))(1 + \cos(x))$$

- 2 Montrer que f est périodique de période 2π .
- 3 a) Étudier la parité de f .
 - a Dédurre qu'il suffit d'étudier la fonction f sur $D_E = [0, \pi]$
- 4 a) Montrer que pour tout x de $[0, \pi]$ on'a

$$f'(x) = (1 + \cos(x))(2 \cos(x) - 1)$$

- a Dresser le tableau de variation de la fonction f .
- b Tracer la courbe (C_f) dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Exercice

Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$, telle que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0)$.

Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$