Chapitre

Étude de fonctions

I Série d'exercices

Exercice

On considère la fonction f définie par : $f(x) = -1 + \sqrt{1-x}$.

1. Déterminer D_f
2. Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$
3. Étudier la dérivabilité de f à gauche de 1 et interpréter le résultat graphiquement.
4. Étudier les variations de f.
5. Étudier les branches infinies de (C_f)
6. Calculer $f(0)$ et $f'(0)$ puis construire (C_f) dans un repère orthonormé.
7.
   a. Montrer que f possède une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminé.
   b. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
   c. Tracer $C_{f^{-1}}$ dans le même repère.

Exercice

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - 3\sqrt[3]{x-1}$.

1. Déterminer D_f et calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
2. Étudier la dérivabilité de f à droite de 1 et interpréter le résultat obtenu.
3. Étudier les variations de f.
4. Étudier la branche infinie de (C_f) en $+\infty$.
5. Tracer (C_f).
6. Soit g la restriction de f sur $[2, +\infty[$.
   a. Montrer que g admet une fonction réciproque sur un intervalle J à déterminer.
   b. Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x+1-\sqrt{x^2-x-2}$.

1 Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2 Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.

3 a Montrer que : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
  b Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x+\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

4 a Étudier la dérivabilité de f à droite en 2 et interpréter le résultat géométriquement.
  b Étudier la dérivabilité de f à gauche en -1 et interpréter le résultat géométriquement.

5 a Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f \setminus \{-1,2\}$.
  b Montrer que : $(\forall x \in]2,+\infty[)$; $f'(x) < 0$ et $(\forall x \in]-\infty,-1[)$; $f'(x) > 0$.
  c Dresser le tableau de variations de f.

6 a Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in D_f \setminus \{-1,2\}$.
  b Étudier la concavité de la courbe (C_f).

7 Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point $A(3,2)$.

8 Montrer que l'équation $f(x) = -4$ admet une unique solution α dans D_f, et que $\alpha \in]-3,-2[$.

9 Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [2,+\infty[$.
  a Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
  b Tracer (C_f) et $(C_{g^{-1}})$ dans un repère orthonormé.

Exercice

Soit f la fonction numérique définie $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{-x^2+2x+1}{x+1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 a Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
  b Calculer $\lim_{x\to-1^+} f(x)$ et $\lim_{x\to-1^-} f(x)$, puis donner une interprétation géométrique aux résultats obtenus.

2 a Déterminer les nombres réels a, b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$; $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x+1}$.
  b Déduire que la droite $(\Delta) : y = ax+b$ est une asymptote oblique de (C_f), puis déterminer la position relative de (C_f) et (Δ).

3 Étudier les variations de f.

4 Soit I le point d'intersection des deux asymptotes de (C_f). Montrer que I est le centre de symétrie de (C_f).

5 Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes de repère.

6 Donner l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.

7 Tracer (C_f) et (T).

8 Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation $f(x) = m$, Calculer la valeur du paramètre réel m.

Exercice

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

1 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2 a Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b Montrer que $f'(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

c Donner le tableau de variations de f.

3 Écrire l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.

4 Déterminer la droite (D) l'asymptote oblique à (C_f), puis étudier sa position relative par rapport à (C_f)

5 Étudier la concavité de la courbe (C_f) puis déterminer ses points d'inflexions.

6 a Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes de repère.

b Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

7 Discuter selon les valeurs du paramètre m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = mx$.

Exercice

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}$ et (C_f) sa courbe représentative dons le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 a Déterminer D_f le domaine de définition de f.

b Montrer que f est une fonction paire.

2 Étudier la dérivabilité de f à droite en 1. Puis donner une interprétation géométrique au résultat.

3 a Montrer que f est dérivable sur $D_f \setminus \{-1;1\}$ et que $f'(x) = \dfrac{2-x^2}{x^3\sqrt{x^2-1}}$ pour tout x de $D_f \setminus \{-1;1\}$.

b Donner le tableau de variations de f.

4 Étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$ puis tracer la courbe (C_f).

5 Soit g la restriction de f sur $[\sqrt{2};+\infty[$. C'est à dire que $g(x) = f(x)$ pour tout x de $[\sqrt{2};+\infty[$.

a Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b Montrer que : $(\forall x \in J)$; $g^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x^2}}$.

c Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = 2(3\sqrt[3]{x^2}-2x); 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}; x > 1 \end{cases}$

1 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement ce résultat.

2 a Montrer que $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{f(x)-2}{x-1} = 0$.

b Montrer que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 0$.

3 Étudier la dérivabilité de f à droite de 0 puis interpréter graphiquement le résultat.

4 a Vérifier que :

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{4(1-\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}; 0 \leq x \leq 1 \\ f'(x) = \dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}; x > 1 \end{cases}$$

b Donner le tableau de variations de f.

5 a Montrer que la courbe (C_f) admet deux points d'inflexions que l'on déterminera les coordonnées.

b Tracer la courbe (C_f).

6 a Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} de $[0;+\infty[$ vers un intervalle J à déterminer.

b Calculer $f\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ puis déduire que $(f^{-1})'(3-\sqrt{2}) = \dfrac{\sqrt{2}+1}{4}$

Exercice

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer D_f, puis calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. Étudier la dérivabilité de la fonction f à gauche de 0 puis interpréter graphiquement ce résultat.
3. a. Montrer que $f'(x) = \frac{2x-3}{2(x-1)}\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ pour tout x de $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$.
   b. Donner le tableau de variations de f.
4. Étudier les branches infinies de (C_f).
5. Tracer (C_f).
6. Soit g la restriction de f sur $I = \left]1;\frac{3}{2}\right[$.
   a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
   b. Tracer la courbe $(G_{g^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x^2-1} - x - 3$ et (C_f) sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer D_f et calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
2. Étudier les branches infinies de (C_f).
3. a. Étudier la dérivabilité de f à droite de 1 et à gauche de -1 puis interpréter graphiquement ses résultats.
   b. Calculer $f'(x)$ pour tout x de D_f.
   c. Donner le tableau de variation de f.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique δ telle que $-2 < \delta < -\frac{3}{2}$.
5. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty;-1[$.
   a. Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.
   b. Donner le tableau de variations de g^{-1}.
   c. Calculer $g^{-1}(0)$ et $(g^{-1})'(0)$ en fonction δ.
   d. Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J et tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.