

Étude de fonctions



Étude de fonctions

1 Rappel :

a La parité :

D Définition

- f est paire $\iff \begin{cases} (\forall x \in D_f) : -x \in D_f \\ (\forall x \in D_f) : f(-x) = f(x) \end{cases}$
- f est impaire $\iff \begin{cases} (\forall x \in D_f) : -x \in D_f \\ (\forall x \in D_f) : f(-x) = -f(x) \end{cases}$

b Les éléments de symétrie

D Définition

- La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de (C_f) si et seulement si :

$$\begin{cases} (\forall x \in D_f); 2a - x \in D_f \\ (\forall x \in D_f); f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$
- Le point $I(a; b)$ est centre de symétrie de (C_f) si et seulement si :

$$\begin{cases} (\forall x \in D_f); 2a - x \in D_f \\ (\forall x \in D_f); f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$$

Exemple

- 1 La droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la fonction f définie par :
- $$f(x) = x^2 - x + 1.$$

On a $D_f = \mathbb{R}$.

En effet :

- On a pour tout x de $\mathbb{R} : 2 \times \frac{1}{2} - x = 1 - x \in \mathbb{R}$

- On a pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 f\left(2 \times \frac{1}{2} - x\right) &= f(1 - x) \\
 &= (1 - x)^2 - (1 - x) + 1 \\
 &= 1 - 2x + x^2 - 1 + x + 1 \\
 &= x^2 - x + 1 \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

- 2 Le point $I(0, 2)$ est un centre de symétrie de la fonction g définie par : $g(x) = -x^3 + 3x + 2$.
En effet :

- On a pour tout x de $\mathbb{R}$: $2 \times 0 - x = -x \in \mathbb{R}$
- On a pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 g(2 \times 0 - x) &= g(-x) \\
 &= -(-x)^3 + 3(-x) + 2 \\
 &= x^3 - 3x + 2 \\
 &= 4 - (-x^3 + 3x + 2) \\
 &= 4 - g(x)
 \end{aligned}$$

Application

- 1 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$. Montrer que la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de (C_f) .
- 2 Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2x - 3 - \frac{3}{x+2}$. Montrer que le point $\Omega(-2; -7)$ est un centre de symétrie de (C_f) .

2

Branches infinies

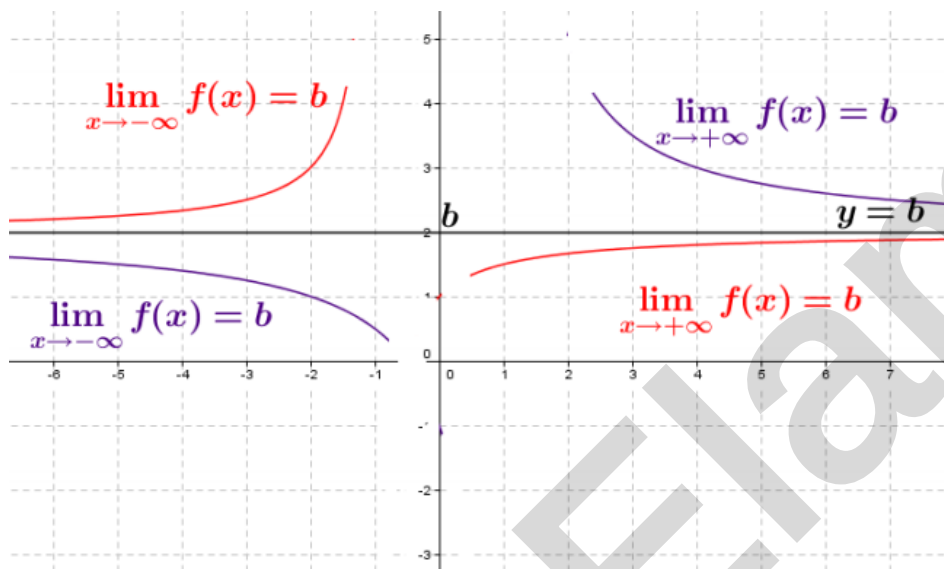
D

Définition

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction f et $M(x, f(x))$ un point de (C_f) . On dit que (C_f) admet une branche infinie si l'une au moins des coordonnées de M tend vers l'infini.

Propriété

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ alors la droite d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de ∞ .



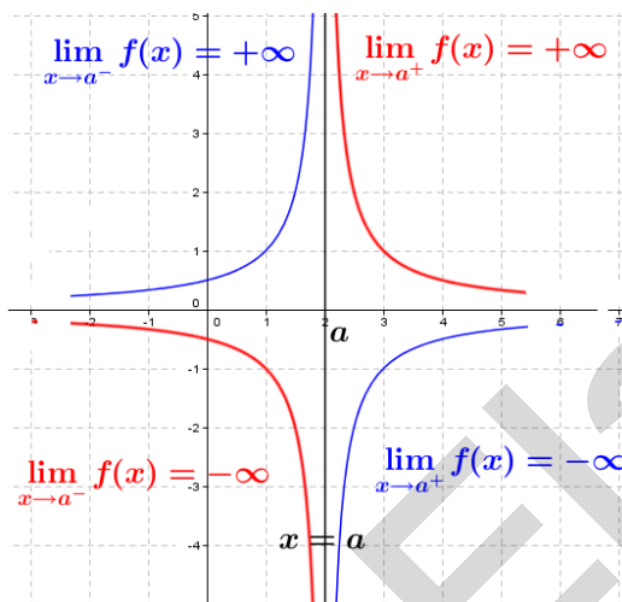
Exemple

On considère la fonction f définie sur $]2, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ donc $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.

Propriété

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage a .



Exemple

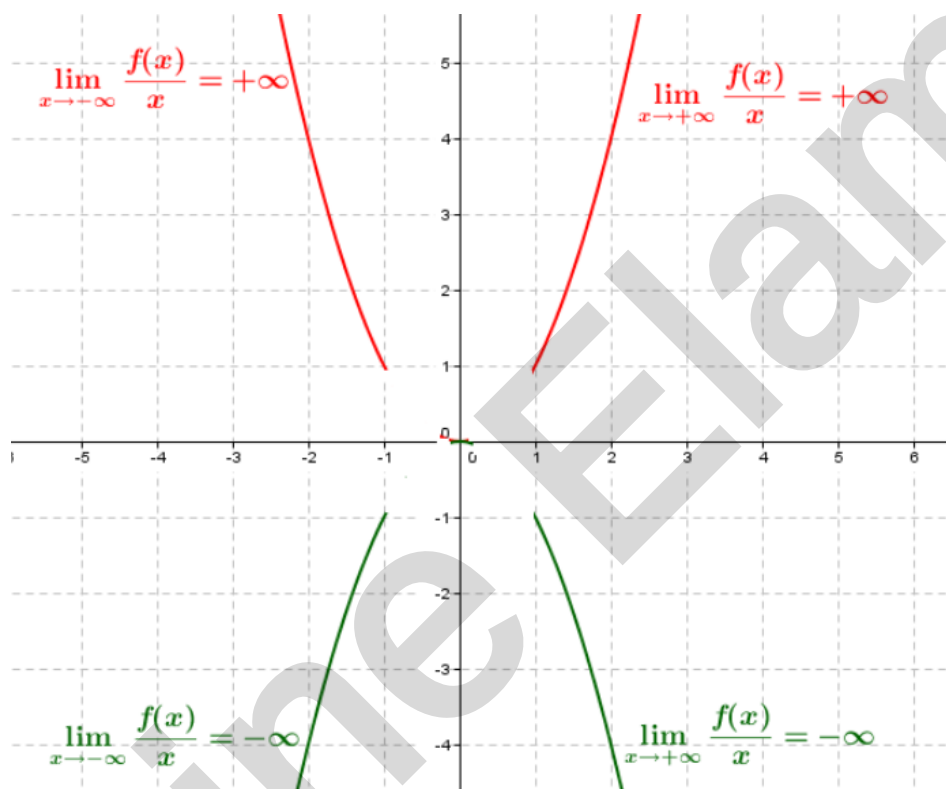
On considère la fonction f définie sur $]2, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$.

On a $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ donc $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$ à droite en 2.

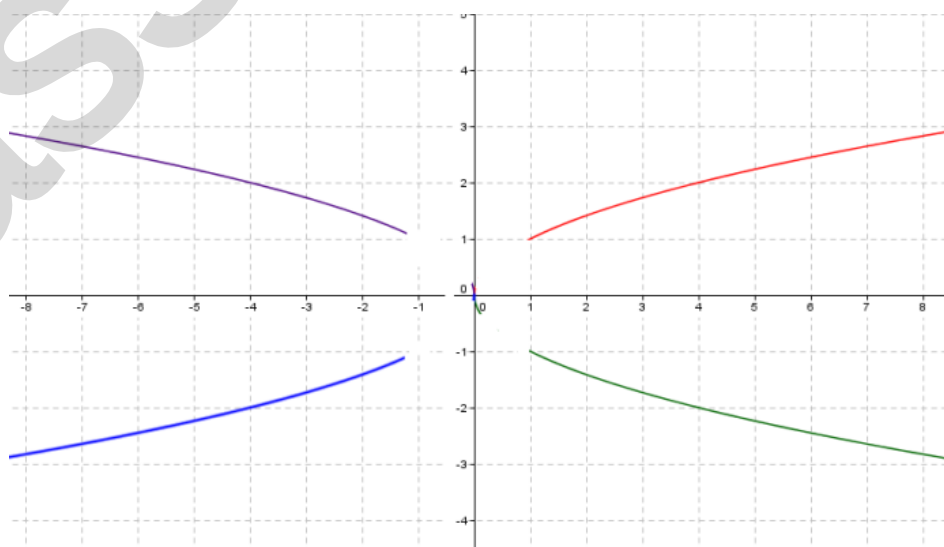
Propriété

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ alors on calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$. Trois cas se présentent :

- 1 Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une **branche parabolique** de direction l'axe des ordonnées au voisinage de ∞ .



- 2 Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une **branche parabolique** de direction l'axe des abscisses au voisinage de ∞ .



- 3 Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ alors on calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax$. Deux cas se présentent :

- a Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \infty$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une **branche parabolique** de direction la droite d'équation $y = ax$ au voisinage de ∞ .

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = 2x + \sqrt{x}$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, on calcul donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, par suite on calcul $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = +\infty$.

D'où $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = 2x$ au voisinage de $+\infty$.

Application

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 2}$.

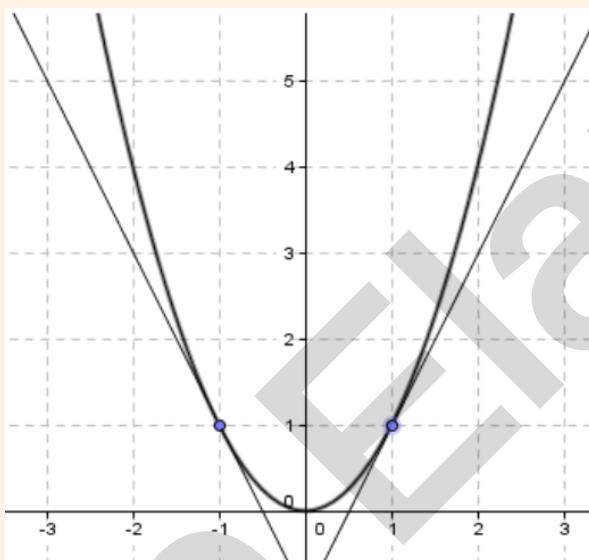
- 1 Déterminer D_f
- 2 Étudier la branche infinie de (C_f) en $-\infty$.

3 Concavité d'une fonction

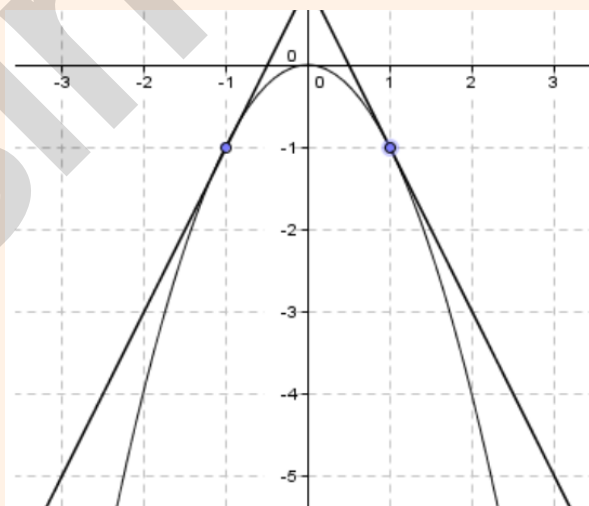
D Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I .

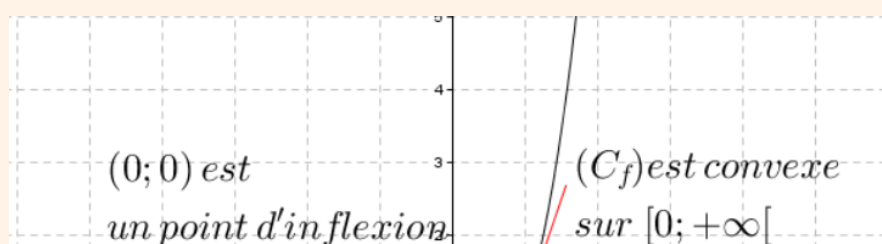
- 1 On dit que f est convexe sur I si sa courbe représentative (C_f) est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.



- 2 On dit que f est concave sur I si sa courbe représentative (C_f) est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.



- 3 Un point où la courbe (C_f) traverse sa tangente s'appelle un point d'inflexion de (C_f).



Propriété

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

- 1 Si $f''(x) > 0$ sur I , alors on dit que (C_f) est convexe.
- 2 Si $f''(x) < 0$ sur I , alors on dit que (C_f) est concave.
- 3 Si f'' s'annule en a et change de signe, alors on dit que $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion pour (C_f) .

Application

On considère la fonction définie sur $I = [0; \pi]$ par : $f(x) = \cos(x)$. Étudier la concavité de (C_f) sur I et vérifier que (C_f) possède un point d'inflexion K dont on détermine ses coordonnées.

**Plan d'étude d'une fonction**

- 1 Ensemble de définition.
- 2 La parité d'une fonction.
- 3 Élément de symétrie.
- 4 Limites aux bornes.
- 5 Dérivabilité.
- 6 Tableau de variation.
- 7 Les branches infinies.
- 8 La convexité et points d'inflexions.
- 9 Intersections avec les axes.
- 10 La représentation graphique.