Chapitre Dérivation et Étude des fonctions

Les orientations pédagogiques 1	Capacités attendues
▶ On rappellera la notion de dérivation et ses applications à partir d'activités variées insistant sur l'importance que revêt l'étude locale et l'étude globale des fonctions figurant au programme et particulièrement l'approche locale d'une fonction et la détermination de certains extrema ; ▶ On donnera une importance aux acquis des élèves concernant la dérivation, le calcul des limites, les éléments de symétrie de la courbe d'une fonction et la résolution graphique d'équations et d'inéquations, en étudiant des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles ; ▶ L'étude du signe de la fonction dérivée $f'(x)$ ne doit poser aucune difficulté aux élèves.	▶ Maitriser les dérivées des fonctions usuelles ; ▶ Déterminer la monotonie d'une fonction à partir du signe de sa dérivée ; ▶ Déterminer le signe d'une fonction à partir de son tableau de variation ou de sa courbe représentative ; ▶ Résoudre graphiquement des équations de la forme $f(x)=\lambda$ et des inéquations de la forme $f(x)<\lambda$ où f est une fonction usuelle.

I La dérivabilité d'une fonction numérique en un point :

Activité

Soit f la fonction definie par : $f(x)=3x+2$

1. Calculer : $f(1)$
2. Determiner $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$
3. Calculer $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

D Définition

Soit f une fonction definie sur un intervalle ouvert I et $a\in I$

On dit que la fonction f est derivable en le nombre a si la limite : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est finie.

cette limite s'appelle Le nombre dérivé de la fonction f en a on le note par $f'(a)$: $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Exemple

Etudions la derivabilite de la fonction f definie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$ en $a = 1$
On a $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$
Alors la fonction f est dérivable en $a = 1$ est le nombre dérivé $f'(1) = 2$

1 la droite tangente en un point

D **Définition**

Soit f une fonction definie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.
Si la fonction f est derivable au point a alors la courbe de la fonction f admet une tangente au point $A(a; f(a))$ d'equation : $(T): y = f'(a)(x-a)+f(a)$

Exemple

Determinons une equation de la tangente (T) a la courbe de la fonction f definie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$ au point $A(1; f(1))$
On la fonction f est derivable au point $a = 1$ est le nombre dérivé $f'(1) = 2$ alors $(\mathscr{C}_f)$admet une tangente au point $A(1;1)$ d'equation : $(T): y = f'(1)(x-1)+f(1)$

$$y = 2(x-1)+1$$

Donc

$$(T): y = 2x-1$$

II La fonction dérivé

1 dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f('x)$	L'intervalle
k	0	$\mathbb{R}$
ax	a	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[\bigcup]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

Exemple

Determinons les derivees des fonctions suivantes :
Si $f(x) = 5$ alors .$f'(x) = 0$
Si $f(x) = 4x$ alors $f'(x) = 4$

Si $f(x)=5x^2$ alors $f'(x)=10x$

Si $f(x)=4\sqrt{x}$ alors $f'(x)=4\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

Si $f(x)=x^3$ alors $f'(x)=3x^2$

Application

Calculer la dérivé de la fonction f dans les cas suivants :

$f(x)=6\,;;\ f(x)=5x\,;;\ f(x)=x\,;;\ f(x)=2x^2\,;;\ f(x)=x^5\,;;\ f(x)=\dfrac{1}{9}x^3\,;;\ f(x)=\dfrac{-1}{x}$

2 Opération sur les dérivés

la fonction	sa dérivé	les conditions
$f+g$	$f'+g'$	
$kf\ (k\in\mathbb{R})$	$kf'\ (k\in\mathbb{R})$	
$f\times g$	$f'\times g+f\times g'$	
f^n	$nf'\times f^{n-1}$	
$\dfrac{1}{f}$	$-\dfrac{f'}{f^2}$	f ne s'annule pas sur I .
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'\times gf\times g'}{g^2}$	g ne s'annule pas sur I
$\sqrt{f}$	$\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$	f est strictement positif sur I .

Exemple

Determinons les derivees des fonctions suivantes :

Si $f(x)=3x^2+4x$ alors .$f'(x)=6x+4$

Si $f(x)=4x(x+1)$ alors $f'(x)=(4x)'\times(x+1)+4x\times(x+1)'=4(x+1)+4x=8x+4$

Si $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ alors $f'(x)=\dfrac{x'\times(x+1)-x\times(x+1)'}{(x+1)^2}=\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

Si $f(x)=\sqrt{x+1}$ alors $f'(x)=\dfrac{(x+1)}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

Application

Calculer la dérivé de la fonction f dans les cas suivants :

$f(x)=x^5+3x^3-2x+1;\ f(x)=\dfrac{x^2-3x}{3x-1}\,;;\ f(x)=(x^3+x^2+1)(x+2)\,;;\ f(x)=(x+1)^5\,;;$

$f(x)=\dfrac{1}{x+2}$

3 Monotonie d'une fonction et le signe de sa dérivé

Activité

- Poser le tableau du signe des expressions suivantes :

$$4x+1 \quad ; \quad (x+1)2x-4)$$

Propriété

Soit f une fonction derivable sur un intervalle I inclus dans D_f

- f est croissante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I\ :\ f'(x) \geq 0$
- f est decroissante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I\ :\ f'(x) \leq 0$
- f est constante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I\ :\ f'(x) = 0$
- f admet un extremum au point a si f' s'annule au point a et change le signe.

Exemple

Etudions la variation de la fonction f definie sur $\mathbb{R}$ par :$f(x) = x^2+2x-1$
On a f est derivable sur $\mathbb{R}$ Alors $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (x^2+2x-1)' = 2x+2 = 2(x+1)$
Le signe de f' est le signe de $x+1$
$x \leq 1 \Rightarrow x+1 \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ est decroissante
$x \geq 1 \Rightarrow x+1 \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ est decroissante

Remarque

Si $f'(a) = 0$ signifie que $(\mathscr{C}_f)$admet une tangente horizontale au point $A(a; f(a))$

Application

Etudier la monotonie de la fonction f dans les cas suivants :

$$f(x) = 4x^3+2x-2 \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{2x^3+1} \quad ; \quad f(x) = (2x+1)^5$$

Application

Soit f la fonction definie par $f(x) = -x^2+2x+1$

1. Determiner D_f l'ensemble de definition de la fonction f
2. Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
3. Determiner la fonction derivee $f'(x)$, puis etudier son signe.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction .
5. Determiner l'extremum de la fonction f

III L'équation $f(x) = a$ et l'inéquation $f(x) \leq a$

Propriété

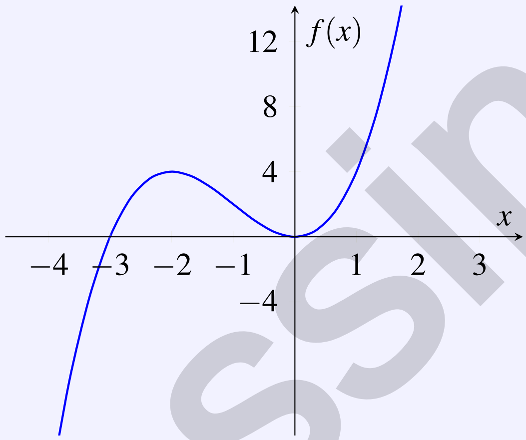
Soient f une fonction numérique et $(\mathscr{C}_f)$sa courbe représentative et a un nombre réel .

- L'ensemble des solution de l'équation $f(x) = a$ sont les abscisses des points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$et la droite $y = a$
- L'ensemble des solution de l'inéquation $f(x) \leq a$ sont les intervalles où $(\mathscr{C}_f)$situé au-dessous la droite d'équation $y = a$.
- L'ensemble des solution de l'inéquation $f(x) \geq a$ sont les intervalles où $(\mathscr{C}_f)$situé au-dessus la droite d'équation $y = a$.

Application

La courbe ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f définie su $\mathbb{R}$ dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$

1. Dresser le tableau de variation de f .
2. Résoudre les équation $f(x) = 4$ et $f(x) = 0$.
3. Résoudre les inéquation $f(x) \leq 4$ et $f(x) > 0$



IV L'étude de quilque fonctions numériques

1 L'étude d'une fonction polynôme

Exemple

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - 2x - 3$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

2 Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

3 Montrer que $\forall x \in D_f : f'(x) = 2x - 2$

4 Dresser le tableau de variation de la fonction f sur D_f

5 Tracer $(\mathscr{C}_f)$la courbe représentative de la fonction f

Exercice

On considère la fonction f définie par : $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 3$

1 Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

2 Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

3 Montrer que $\forall x \in D_f : f'(x) = 12x^2 - 12x$

4 Dresser le tableau de variation de la fonction f sur D_f

5 Tracer $(\mathscr{C}_f)$la courbe représentative de la fonction f

6 Déterminer graphiquement le nombre de solutions de chacune des inéquations suivantes : $f(x) = -1$, $f(x) = 2$ et $f(x) = 3$

7 Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \geq 1$

2 L'étude d'une fonction $x \to \sqrt{ax+b}$

Exemple

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{2x+2}$

1 Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

2 Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

3 Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$

4 Dresser le tableau de variation de la fonction f sur D_f

5 Tracer $(\mathscr{C}_f)$la courbe représentative de la fonction f

Exercice

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{2x-2}$

1 Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

2 Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

3. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur D_f
5. Tracer $(\mathscr{C}_f)$la courbe représentative de la fonction f