

Les application



Série d'exercices

Exercice : 1

On considère la relation f définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow f(x) = \frac{x^2}{3x-1}$$

- 1 f est-elle une application ? Sinon, quelle est la condition pour qu'elle soit application ?
- 2 Déterminer, dans ce cas, les antécédents des nombres suivants -2 , 3 et 0 .

Exercice : 2

On considère l'application

$$k : \mathbb{R}^+ \longrightarrow]-\infty; 1[$$

$$x \longrightarrow \frac{x-2}{x}$$

- 1 Déterminer $k(]0; 1[\cup]3; 4])$
- 2 Déterminer $k^{-1}([0; 1])$ et $k^{-1}(]-3; -2] \cup [0; 1])$

Exercice : 3

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R} - \{1\}$ vers \mathbb{R} par $f(s) = \frac{2s+5}{s-1}$

- 1 Montrer que f est une application injective.
- 2 Déterminer $f^{-1}(\frac{2}{3})$.
- 3 Déterminer $f(]1; +\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty; 2])$

Exercice : 4

Dans chacun des cas suivantes, Montrer que les applications f et g sont égales.

1

$$f :]0; 1[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow (-1)^{E(x)} (x - E(x))$$

et

$$g :]0; 1[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow x$$

2

$$f :]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow 1 - (\cos(x) - \sin(x))^2$$

et

$$g :]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)}$$

Exercice : 5

On considère l'application f définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow f(x) = 2x - |x| + 4$$

1 Déterminer $f|_{]-\infty; 0]}$ la restriction de l'application f à l'intervalle $]-\infty; 0]$

2 Déterminer $f|_{[0; +\infty[}$ la restriction de l'application f à l'intervalle $[0; +\infty[$

Exercice : 6

On considère l'application f définie par :

$$g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow x - \sqrt{x}$$

- 1 Montrer que f n'est pas injective.
- 2
 - a Résoudre dans \mathbb{R}^+ l'équation $f(x) = -1$.
 - b Que peut-on conclure ?
- 3 Soit g la restriction de f à $[\frac{1}{4}; +\infty[$
 - a Montrer que g est bijective de $[\frac{1}{4}; +\infty[$ à un intervalle J qu'il faut déterminer
 - b Déterminer l'application réciproque g^{-1}

Exercice : 7

Soit f une application définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x^2 - 8x + 7 \end{aligned}$$

- 1 Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = 7$ f est-elle injective ?
- 2 Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) \geq -9$ f est-elle surjective ?
- 3 Soit g la restriction de f à $] -\infty; 4]$
 - a Prouver que g est bijective de $] -\infty; 4]$ vers $[-9; +\infty[$
 - b Donner l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout x de $[-9; +\infty[$

Exercice : 8

On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y) &\longrightarrow (3x - y; x - 3y) \end{aligned}$$

Montrer que f est bijective, et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}

Exercice : 9

Soient A et B deux parties non vides d'un ensemble E .

On considère l'application

$$\begin{aligned} f : P(E) &\longrightarrow P(E) \times P(E) \\ X &\longrightarrow (X \cup A; X \cup B) \end{aligned}$$

1 a Calculer $f(\emptyset)$ et $f(A \cap B)$

b Montrer que :

$$f \text{ est injective} \iff A \cap B = \emptyset$$

2 Montrer que f n'est pas surjective.

Exercice : 10

On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \frac{\sqrt{x} - 3}{2\sqrt{x} + 2} \end{aligned}$$

1 a Montrer que l'équation $f(x) = -\frac{1}{2}$ n'admet pas des solutions dans \mathbb{R}^+ .

b f est-elle surjective ?

c Montrer que f est injective

2 On considère l'application

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}[\right. \\ x &\longrightarrow \frac{\sqrt{x} - 3}{2\sqrt{x} + 2} \end{aligned}$$

a Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : g(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{x} + 1}$

b En déduire que $g^{-1}\left(\left[-\frac{3}{2}; -\frac{5}{6}\right]\right) = \left[0; \frac{1}{4}\right]$

c Montrer que $g(\mathbb{R}^+) = \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}[\right.$

d Déduire que l'application g est bijective, et déterminer sa bijection réciproque g^{-1}

Exercice : 11

On pose $I =]0; +\infty[$ et on considère l'application f définie par :

$$f : I \times I : \longrightarrow I \times I$$

$$(x; y) : \longrightarrow f(x; y) = \left(xy; \frac{x}{y} \right)$$

- 1 Montrer que f est injective et surjective.
- 2 En déduire que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque f^{-1} .

Exercice : 12

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$ dans les cas suivantes :

- 1 $f(x) = x^2 - 2x + 5$ et $g(x) = 2x - 6$
- 2 $f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$ et $g(x) = 5x + 4$
- 3 $f(x) = \sqrt{x^2+2}$ et $g(x) = 3 - x^2$

Exercice : 13

On considère l'application

$$f : [1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow x - 1 - 2\sqrt{x-1}$$

- 1
 - a Déterminer $f^{-1}(\{-\frac{1}{2}\})$.
 - b l'application f est-elle injective ? justifier.
- 2
 - a Montrer que $f([1; +\infty[) = [0; +\infty[$.
 - b l'application f est-elle surjective ?
- 3 On considère l'application

$$g : [0; +\infty[\longrightarrow]-1; +\infty[$$

$$x \longrightarrow x^2 - 2x$$

Déterminer une application h telles que $f = g \circ h$

Exercice : 14

On pose

$$f : [1; +\infty[\longrightarrow [1; +\infty[\\ x \longrightarrow x + \sqrt{x^2 - x}$$

- 1 Vérifier que f est une application.
- 2 Montrer que f est bijective puis déterminer l'application réciproque f^{-1} .
- 3 Soit

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow x^2 + 1$$

- a Montrer que $g(\mathbb{R}) \subset [1; +\infty[$
- b Déterminer $f \circ g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Exercice : 15

On considère l'application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1}$$

- 1
 - a Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(1-x) = f(x)$
 - b l'application f est-elle injective ?
- 2
 - a Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$
 - b l'application f est-elle surjective ?
- 3 Soient g et h les restrictions de f aux intervalles $I =]\frac{1}{2}; +\infty[$ et $J =]-\infty; \frac{1}{2}[$ respectivement
 - a Montrer que g réalise une bijection de I sur l'intervalle $K =]\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty[$, puis définir g^{-1} .
 - b On considère l'application

$$h : J \longrightarrow I \\ x \longrightarrow 1 - x$$

Vérifier que $h = g \circ k$ et en déduire que h est bijective puis déterminer h^{-1} .

Exercice : 16

On considère l'application f définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(3x) = 2f(x)$.

- 1 Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : f(x) = 2^n f\left(\frac{x}{3^n}\right)$
- 2 Calculer $f(2007)$ sachant que $f(223) = 2006$