

Calcul de probabilités

Les orientations pédagogiques 1	Capacités attendues
-On évitera toute présentation théorique de la notion de probabilité -On remarquera la stabilité de la fréquence d'un événement aléatoire à partir de la répétition d'une expérience aléatoire simple un très grand nombre de fois (Lancer d'une pièce de monnaie ,tirage d'une boule d'un sac), on pourra utiliser à cette fin la touche rand de la calculatrice scientifique ou la calculatrice scientifique programmable ou l'ordinateur ; -On partira de situations concrètes de manière progressive pour permettre à l'élève de décrire des expériences aléatoires en utilisant le langage probabiliste ; -On présentera la probabilité d'un événement à partir de la stabilité de la fréquence d'un événement aléatoire ; -On renforcera la présentation des notions de probabilité par des exemples variés couvrant différents cas possibles ; - On appliquera la probabilité dans des situations variées en relation avec les disciplines de la spécialité. - Le calcul de probabilité sera une occasion pour rappeler les principaux résultats du dénombrement.	-Calculer la probabilité de la réunion de deux événements ; la probabilité de l'intersection de deux événements et le calcul de la probabilité de l'événement contraire ; -Utiliser le modèle de dénombrement selon la situation étudiée ;



Expériences aléatoires - Vocabulaire

1 Définitions

Activité

Expérience 1 : On lance un dé et on note le résultat la face supérieure. Quel sont les résultats possibles ?

Expérience 2 : On lance une pièce de monnaie 3 fois successives et on note à chaque fois le résultat de la face supérieure. Quel sont les résultats possibles ?

D

Définition

On appelle **expérience aléatoire** toute expérience dont les résultats possibles sont connus mais on ne peut pas donner le résultat exact avant de la réaliser.

À titre d'exemple les deux expériences précédentes.

D

Définition

Dans une expérience aléatoire chaque cas possible est appelé **éventualité** ou **issue**.

Exemple

$$\begin{cases} \text{Dans l'expérience 1: } 3 \text{ est une éventualité} \\ \text{Dans l'expérience 2: } FFP \text{ est une éventualité} \end{cases}$$

D

Définition

Les éventualités d'une expérience aléatoire constituent un ensemble qu'on l'appelle **univers**.
On le note souvent Ω .

Exemple

$$\begin{cases} \text{Dans l'expérience 1: } \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ \text{Dans l'expérience 2: } \Omega = \{FFF, FFP, FPF, PFF, FPP, PFP, PPF, PPP\} \end{cases}$$

D Définition

- 1 Un événement est une partie de l'univers Ω .
- 2 Un événement constitué d'une seule éventualité est appelé événement élémentaire.

Exemple

L'événement A : "obtenir la face P une seule fois" issu de l'expérience 2. Représente exactement la partie $A = \{PFF, FPF, FFP\}$ de Ω .

Remarque

- 1 Si le résultat d'une expérience aléatoire appartient à un événement A , on dit que l'événement A est réalisé.
- 2 L'univers Ω d'une expérience aléatoire est appelé l'**événement certain**, car le résultat de l'expérience est toujours dans Ω .
- 3 $\emptyset$ est appelé l'événement impossible.

2

Réalisation des événements "A ou B" et "A et B"

D Définition

Soient A et B deux événements d'une expérience aléatoire.

- 1 L'événement "A ou B" est l'événement formé par les issues qui réalisent l'un au moins des événements A et B , noté par $A \cup B$.
- 2 L'événement "A et B" est l'événement formé par les issues qui réalisent à la fois A et B , noté par $A \cap B$.
- 3 Deux événements qui ne peuvent pas se réaliser en même temps sont dites incompatibles.

Exemple

Dans l'**expérience 1**, on considère les événements :

A : "Obtenir un nombre impair".

B : "Obtenir un nombre pair".

C : "Obtenir un multiple de 3".

On a $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ et $C = \{3, 6\}$. Donc $A \cap C = \{3\}$, c'est à dire si on obtenu la face 3 alors on dit que l'événement $A \cap C$ est réalisé.

D'autre part $A \cap B = \emptyset$, c'est à dire l'événement $A \cap B$ n'est jamais réalisé. Dans ce cas on dit que les deux événements A et B sont **incompatibles**.

3 Événement contraire

D

Définition

L'événement contraire de A , noté $\bar{A}$, est l'événement former des issues de Ω qui ne réalisent pas A .

Remarque

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \text{ et } A \cup \bar{A} = \Omega.$$

Exemple

Dans l'**expérience 1**, on considère l'événement A : "obtenir un nombre pair". On a $A = \{2, 4, 6\}$. L'événement contraire de A est $\bar{A}$: "obtenir un nombre impair", et on a $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$.



Probabilités d'un événement

1 Probabilités d'un événement

Activité

On a simulé n lances d'un dé équilibré à six faces, numérotées de 1 à 6, et on a noté le nombre d'apparition du nombre 5.

Le tableau ci-dessous résume les résultats obtenus.

Le nombre de lances n	10	50	100	500	1000	10000	100000
Le nombre d'apparition du nombre 5	3	10	19	76	161	1981	16649
Les fréquences d'apparition du nombre 5 : f_i		0.2			0.161		
$f_i - \frac{1}{6}$							

1 Recopier et compléter le tableau précédent.

2 a Calculer : $P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\})$.

b Conjecturer $P(\Omega)$.

3 Soit A l'événement : "le dé désigne un nombre pair". Calculer $P(A)$.

4 Vérifier que : $P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\})$

D

Définition

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. La probabilité d'un événement A égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constitue.

Propriété

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. A et B deux événements.

1 $P(\Omega) = 1$

2 $P(\emptyset) = 0$

3 $0 \leq P(A) \leq 1$

4 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Application

Soit $\Omega = \{a, b, c\}$ l'univers d'une expérience aléatoire. tel que $P(\{a, c\}) = \frac{1}{3}$ et $P(\{a, b\}) = \frac{4}{5}$.
Déterminer $P(\{a\})$, $P(\{b\})$ et $P(\{c\})$.

2

Hypothèse d'équiprobabilité

D

Définition

Lorsque tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit qu'il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.

Propriété

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

Dans une situation équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est donner par : $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Application

Une urne contenant 7 boules indiscernables au toucher. 4 blanches et 3 noirs. On tire simultanément 3 boules. Calculer la probabilité des événements suivantes :

A : "Obtenir 3 boules de même couleurs".

B : "Obtenir une boule blanche au plus".