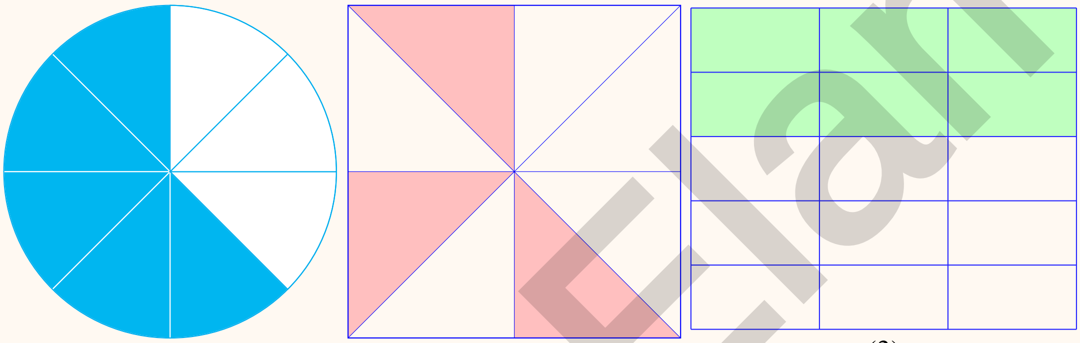
I Écriture fractionnaire d'un nombre

Activité

1 Exprimer par une fraction la partie de chaque figure qui a été colorée :



(1) (2) (3)

2 A quelle opération mathématique correspond le nombre $\frac{7}{4}$?

3 Trouver l'écriture décimale de $\frac{7}{4}$

Définition

Soient a et b deux nombres entiers avec $b \neq 0$
★ Le quotient de a par b est le nombre c tel que : $a = b \times c$
Ce quotient se note : $\frac{a}{b}$
★ La notation $\frac{a}{b}$ est appelée une fraction
★ Le nombre a est appelé numérateur
★ Le nombre b est appelé dénominateur

EXEMPLE

$\frac{7}{3}$; ; $\frac{2}{3}$; ; $\frac{6}{3}$; ; $\frac{1111}{45}$; ; $\frac{20}{11}$

Remarque

✪ Le nombre $\frac{3}{4}$ est une fraction
Mais le nombre $\frac{3.1}{4}$ n'est pas une fraction,, mais une écriture fractionnaire
✪ Tout nombre entier peut se mettre sous forme de fraction

$$12 = \frac{12}{1} \quad ;; \quad 5 = \frac{5}{1} \quad ;; \quad 7 = \frac{7}{1}$$

✪ Certaines fractions peuvent être des nombres décimaux

$$\frac{5}{4} = 1.25 \quad ;; \quad \frac{3}{2} = 1.5 \quad ;; \quad \frac{2}{10} = 0.2$$

En revanche, certaines fractions ne sont pas de nombres décimaux, par exemple $\frac{2}{3}$ nest pas un nombre décimal car la division $2 \div 3$ ne sarrête jamais.

✪ Tous les nombres décimaux peuvent être écrits sous la forme dune fraction dont le dénominateur est 10, 100, 1000,...

$$3.2 = \frac{32}{10} \quad ;; \quad 1.23 = \frac{123}{100} \quad ;; \quad 0.0115 = \frac{115}{10000}$$

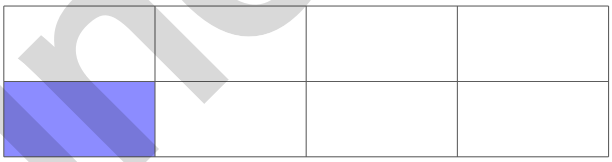
Application

1 Dessiner un rectangle et colorie la partie qui représente $\frac{1}{8}$

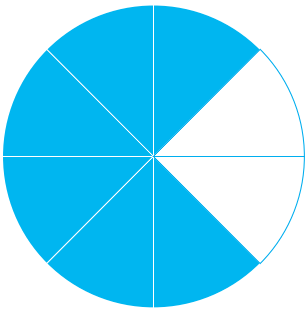
2 Dessiner un cercle et hachuré la partie qui représente $\frac{3}{4}$

Solution

1 Dessin 1



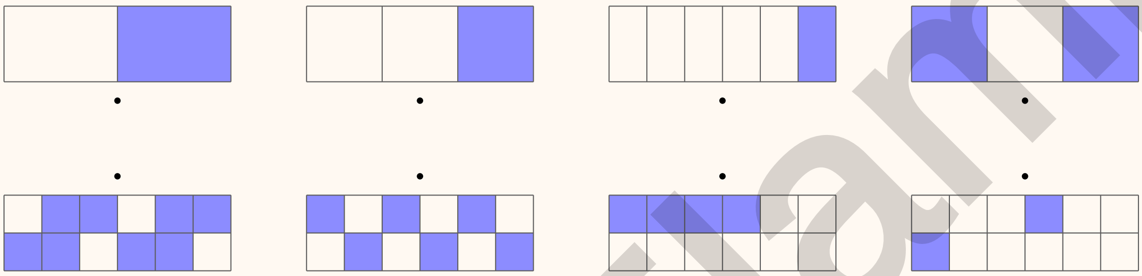
2 Dessin 2



II Égalité de fractions

Activité

1 Relier par un trait les figures dont les proportions de surface colorée sont égales, puis déduire les égalités de fractions correspondantes



$\frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$ $\quad$ $\frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$ $\quad$ $\frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$ $\quad$ $\frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$

2 Comment passe-t-on d'une fraction à sa fraction égale (avec une même opération sur le numérateur et le dénominateur) ?

Propriété

On ne change pas la valeur d'une fraction $\frac{a}{b}$, si on multiplie (ou o divise) son numérateur et son dénominateur par un même nombre décimal non nul k ($k \neq 0$)

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \qquad et \qquad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

EXEMPLE

- ✪ $\frac{1.8}{4.2} = \frac{18}{42} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$
- ✪ $\frac{4}{7} = \frac{16}{28} = \frac{40}{70} = \frac{20}{35}$
- ✪ $\frac{34}{51} = \frac{34 \div 17}{51 \div 17} = \frac{2}{3}$
- ✪ $\frac{20}{25} = \frac{20 \div 5}{25 \div 5} = \frac{4}{5}$

Simplification d'une fraction

Définition

Simplifier une fraction, cest écrire une fraction qui lui est égale, mais avec un numérateur et un dénominateur plus petits.

EXEMPLE

✶ Simplification de la fraction $\frac{4}{8}$ est : $\frac{4}{8}=\frac{2\times 2}{2\times 4}=\frac{2}{4}=\frac{1\times 2}{2\times 2}=\frac{1}{2}$

✶ Simplification de la fraction $\frac{60}{68}$ est : $\frac{60}{68}=\frac{4\times 15}{4\times 17}=\frac{15}{17}$

Remarque

- ✯ Si une fraction ne peut être simplifiée, on dit qu'elle est irréductible
- ✯ Pour simplifier une fraction, on peut utiliser les critères de divisibilité
  - ➻ un nombre est divisible par 2 s'il se termine par $2,4,6$ ou 8
  - ➻ un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5
  - ➻ un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3
  - ➻ un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9

Application

Simplifier le plus possible les fractions suivantes :

$$\frac{18}{8} \;;;\; \frac{8}{64} \;;;\; \frac{25}{95} \;;;\; \frac{49}{7} \;;;\; \frac{21}{49} \;;;\; \frac{300}{21}$$

Solution

$$\frac{18}{8}=\frac{9}{4} \;;;\; \frac{8}{64}=\frac{1}{8} \;;;\; \frac{25}{95}=\frac{5}{19} \;;;\; \frac{49}{7}=7 \;;;\; \frac{21}{49}=\frac{3}{7} \;;;\; \frac{300}{21}=\frac{100}{7}$$

Soient a, b, c et d quatre nombres décimax non nuls

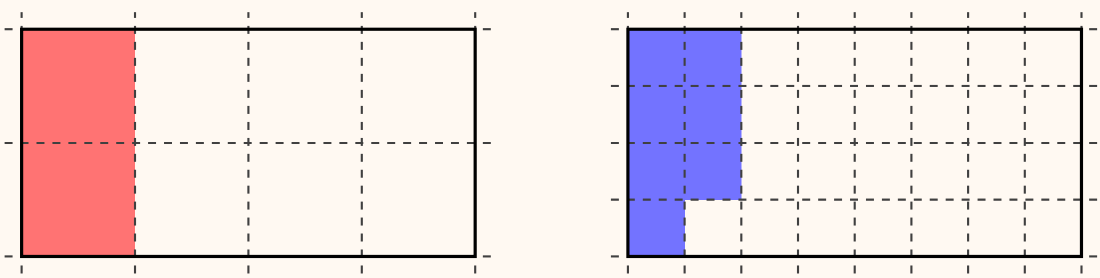
❋ Si on a : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, alors : $a\times d=b\times c$ (c'est la règle du produit en croix)

❋ Si on a : $a\times b=c\times d$, alors : $\frac{a}{c}=\frac{d}{b}$ ou $\frac{a}{d}=\frac{c}{b}$

III Comparaison de fractions

Activité

On a tracé, ci-dessous, deux rectangles de même aire



1 Déterminer la fraction du rectangle correspondant à la zone coloré en rouge

2 Quelle est la fraction qui représente la zone colorée en bleu

3 A l'aide du graphique, comparer ces deux fractions

4 Compléter, dans le triangle de gauche, la zone colorée en rouge qui correspond à $\frac{8}{32}$ du triangle

On a en effet : $\frac{2}{8} = \frac{8}{32}$

5 Sans utiliser la graphique, paut-t-on alors comparer les deux fractions de la question 1 et 2 ? comment ?

6 Compléter : Pour comparer deux fractions, il faut qu'elles aient le même (dénominateur)

on peut aussi les comparer si elles ont le même (numérateur)

1 Fractions de même dénominateur

Propriété

Si deux nombres en écriture fractionnaires, ont le même dénominateur, le plus petit est celui qui a le plus petit numérateur

Exemple

✸ Comparons $\frac{7}{5}$ et $\frac{2}{5}$

On a les deux fractions $\frac{7}{5}$ et $\frac{2}{5}$ on le même dénominateur 5

Et comme : $7 > 2$, Alors $\frac{7}{5} > \frac{2}{5}$

✸ Comparons $\frac{7}{17}$ et $\frac{25}{17}$

On a les deux fractions $\frac{7}{17}$ et $\frac{25}{17}$ on le même dénominateur 17

Et comme : $7 < 25$, Alors $\frac{7}{17} < \frac{25}{17}$

Propriété

Des fractions ayant le même dénominateur sont rangées dans l'ordre de leurs numérateurs

• Exemples

Rangeons les fractions suivantes dans l'ordre décroissant : $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ et $\frac{1}{10}$

On a toutes ces fraction ont le même dénominateur 10

Et comme $1 < 2 < 3$, alors $\frac{3}{10} > \frac{2}{10} > \frac{1}{10}$

2 Fractions de même numérateur

Propriété

Si deux nombres en écriture fractionnaires, ont le même numérateur, le plus grand est celui qui a le plus petit dénominateur

EXEMPLE

✷ Comparons $\frac{3}{5}$ et $\frac{3}{7}$

On a les deux fractions $\frac{3}{5}$ et $\frac{3}{7}$ on le même numérateur 3

Et comme : $5 < 7$, Alors $\frac{3}{5} > \frac{3}{7}$

✷ Comparons $\frac{7}{17}$ et $\frac{7}{2}$

On a les deux fractions $\frac{7}{17}$ et $\frac{7}{2}$ on le même numérateur 7

Et comme : $17 > 2$, Alors $\frac{7}{17} < \frac{7}{2}$

Propriété

Des fractions ayant le même numérateur sont rangées dans l'ordre inverse de leurs dénominateurs

• Exemples

Rangeons les fractions suivantes dans l'ordre croissant : $\frac{6}{7}$, $\frac{6}{13}$ et $\frac{6}{5}$

On a toutes ces fraction ont le même numérateur 6

Et comme $5 < 7 < 13$, alors $\frac{6}{13} < \frac{6}{7} < \frac{6}{5}$

3 Fractions de dénominateurs différents

Propriété

Pour comparer deux nombres en écritures fractionnaires de dénominateurs différents, on commence par les mettre au même dénominateur puis on compare leurs numérateurs

Exemples

✷ Comparons : $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{8}$

Mettons les deux fractions $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{8}$ au même dénominateur

On a $\frac{1}{4} = \frac{1 \times 2}{4 \times 2} = \frac{2}{8}$

Alors la comparaison de $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{8}$ revient à comparer $\frac{2}{8}$ et $\frac{3}{8}$

Comme $2 < 3$, donc $\frac{2}{8} < \frac{3}{8}$

Alors $\frac{1}{4} < \frac{3}{8}$

✷ Comparons : $\frac{4}{3}$ et $\frac{7}{5}$

Mettons les deux fractions $\frac{4}{3}$ et $\frac{7}{5}$ au même dénominateur

On a $\frac{4}{3} = \frac{4 \times 5}{3 \times 5} = \frac{20}{15}$ et $\frac{7}{5} = \frac{7 \times 3}{5 \times 3} = \frac{21}{15}$

Alors la comparaison de $\frac{4}{3}$ et $\frac{7}{5}$ revient à comparer $\frac{20}{15}$ et $\frac{21}{15}$

Comme $20 < 21$, donc $\frac{20}{15} < \frac{21}{15}$

Alors $\frac{4}{3} < \frac{7}{5}$

Application

1. Comparer les fractions suivantes :
   $\frac{11}{42}$ et $\frac{3}{42}$; ; $\frac{4}{17}$ et $\frac{4}{31}$; ; $\frac{5}{8}$ et $\frac{3}{4}$
2. Ranger ces fractions dans l'ordre décroissant :
   $\frac{9}{21}$; ; $\frac{2}{21}$; ; $\frac{3}{21}$; ; $\frac{15}{21}$
3. Ranger ces fractions dans l'ordre croissant :
   $\frac{3}{4}$; ; $\frac{3}{4}$; ; $\frac{3}{20}$; ; $\frac{3}{10}$

Solution

1. $\frac{11}{42} > \frac{3}{42}$; ; $\frac{4}{17} > \frac{4}{31}$; ; $\frac{5}{8} < \frac{3}{4}$
2. $\frac{15}{21} > \frac{9}{21} > \frac{3}{21} > \frac{2}{21}$
3. $\frac{3}{20} < \frac{3}{10} < \frac{3}{5} < \frac{3}{4}$

Remarque

Soient a et b deux nombres décimaux non nuls
✸ Si $a < b$, alors : $\frac{a}{b} < 1$ ✸ Si $a > b$, alors : $\frac{a}{b} > 1$