

Les ensembles



Notion d'ensemble

1 Définition et exemples

Définition

Nous appellerons ensemble une collection d'objets. Chacun de ces objet est appelé élément de l'ensemble.

Si un élément a fait partie d'un ensemble E , on dira que a appartient à E , ou E contient a , et on notera : $a \in E$ Si a n'appartient pas à E , on notera : $a \notin E$

• Exemple

- 1 $\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels, $\{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$.
- 2 $\mathbb{Z}$ ensemble des entiers relatifs, $\{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$.
- 3 L'ensemble des diviseurs de 12 est : $D_{12} = \{-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.
- 4 L'ensemble des lettres constituant le mot logique est : $\{l; o; i; g; u; q; e\}$.

2 Construire des ensembles

a Définition en extension

On peut définir un ensemble fini en énumérant les éléments qui le constituent.

Par exemple : $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ est un ensemble constitué des 5 éléments 1, 2, 3, 4 et 5.

On utilisera des accolades pour délimiter les éléments de l'ensemble. L'ordre des éléments, et le fait qu'ils soient redoublés n'a aucune importance dans la définition de l'ensemble.

b Définition en compréhension

On s'appuie sur un ensemble déjà existant, dont on sélectionne les éléments vérifiant une certaine propriété. Par exemple :

- 1 $\{n \in \mathbb{N} / \exists k \in \mathbb{N} n = 2k\}$ est l'ensemble des entiers pairs.
- 2 $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$
- 3 $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^* \right\}$

Application

On considère les deux ensembles suivants : $A = \left\{ x \in \mathbb{N} / \frac{3x+2}{x-2} \in \mathbb{Z} \right\}$ et $B = \left\{ x \in \mathbb{N} / \frac{5x+7}{x-1} \in \mathbb{N} \right\}$

Déterminer en extension les ensembles A et B .

c Un ensemble particulier

On considère en mathématiques, qu'il y a un unique ensemble, appelé ensemble vide, qui ne contient aucun élément, et qui est noté $\emptyset$. Si on considère un élément x quelconque, on a forcément $x \notin \emptyset$.



Inclusion d'ensembles

Définition

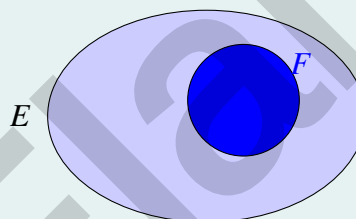
On dit qu'un ensemble F est inclus dans un ensemble E si tout élément de F appartient à E .
On note : $F \subset E$ et on lit :

- 1 F est inclus dans l'ensemble E .
- 2 F est contenu dans l'ensemble E .
- 3 F est une partie de l'ensemble E .
- 4 F est un sous ensemble de l'ensemble E .

Et on note aussi $F \not\subset E$ et on lit : F n'est pas inclus dans l'ensemble E .

$F \not\subset E$ est la négation de $F \subset E$.

$F \not\subset E$ signifie qu'il existe au moins un élément de F qui n'appartient pas à E .



Remarque

- 1 D'après la définition précédente, tout ensemble E est inclus dans lui même : $E \subset E$.
- 2 Lorsque le sous-ensemble F est strictement inclus dans l'ensemble E on dit que F est un sous-ensemble propre de E . On doit alors le préciser par la conjonction des deux propriétés : $F \subset E$ et $F \neq E$.
- 3 L'ensemble vide est contenu dans tout ensemble E : $\emptyset \subset E$.
- 4 Ne pas confondre l'appartenance qui est une relation entre un élément et un ensemble et l'inclusion qui est une relation entre deux ensembles.
Par exemple, on aura $x \in \{x; y; z; t\}$ mais $\{x\} \subset \{x; y; z; t\}$.
- 5 soient E et F deux sous-ensembles de A , on a : $F \subset E \Leftrightarrow (\forall x \in A, x \in F \Rightarrow x \in E)$

Méthode

- 1 Pour démontrer qu'un ensemble F est inclus dans un ensemble E on prend un élément x quelconque de F , on utilise les hypothèses qui définissent l'ensemble F et on démontre que x vérifie les propriétés qui définissent l'ensemble E . La démonstration prend donc la structure suivante :

Soit x un élément de l'ensemble F

.....

(raisonnement)

.....

donc x est un élément de l'ensemble E

Conclusion : $F \subset E$

- 2 Pour démontrer que $F \not\subset E$, Il suffit de trouver un élément de F qui n'est pas dans l'ensemble E (un contre-exemple suffit).

• Exemple

- 1 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$; $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- 2 $\{n \in \mathbb{N} / \exists p \in \mathbb{N} \quad n = 2p\} \subset \mathbb{N}$.
- 3 $\{2; 3; 4\} \subset \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

1 Égalité de deux ensembles

Définition

Deux ensembles sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments. Cela se traduit par deux inclusions simultanées :

$$E = F \Leftrightarrow (F \subset E \text{ et } E \subset F)$$

Remarque

Pour démontrer l'égalité de deux ensembles E et F il faudra faire deux démonstrations d'inclusion, d'une part pour démontrer $F \subset E$ d'autre part pour démontrer $E \subset F$.

• Exemple

On considère les deux ensembles suivants : $A = \{x \in \mathbb{R} / |1 - \frac{x}{2}| < 1\}$ et $B =]0 ; 4[$.

$$x \in A \Leftrightarrow |1 - \frac{x}{2}| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{x}{2} < 1 \Leftrightarrow -2 < -\frac{x}{2} < 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{x}{2} < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 4 \Leftrightarrow x \in B$$

D'où $A = B$

2 Transitivité de l'inclusion

Propriété

A , B , et C étant trois ensembles, si le premier ensemble A est contenu dans le second B et si le deuxième ensemble B est contenu dans le troisième C , alors le premier ensemble A est contenu dans le troisième C ; on dit que l'inclusion est transitive.

$$\text{On a : } A \subset B \text{ et } B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

EXEMPLES

A faire



Opérations sur les ensembles

1 Ensemble des parties d'un ensemble

Définition

Soit E un ensemble.

L'ensemble des parties de E est l'ensemble, généralement noté $\mathcal{P}(E)$, dont les éléments sont les sous-ensembles de E et on a : $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$.

Remarque

$\mathcal{P}(E)$ n'est jamais vide car l'ensemble vide $\emptyset$ et E sont toujours des parties de E :

$$\emptyset \in \mathcal{P}(E) \quad \text{et} \quad E \in \mathcal{P}(E).$$

Exemple

1 Soit $E = \{a; b; c\}$ un ensemble de trois éléments. Les sous-ensembles de E sont :

a $\emptyset$ et E .

b les trois singletons $\{a\}$; $\{b\}$ et $\{c\}$.

c les trois paires $\{a; b\}$; $\{a; c\}$ et $\{b; c\}$.

L'ensemble des parties de E est donc :

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}; E\}$$

2 $\mathbb{Z} \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

3 $] -\pi; \pi] \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Application

Déterminer en extension l'ensemble des parties de l'ensemble $E = \{a; b; 1; 2\}$

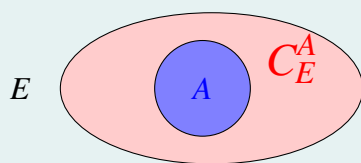
2 Complémentaire d'un ensemble

Définition

Si A est une partie de l'ensemble E , on appelle complémentaire de A dans E l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A .

On note le plus souvent le complémentaire de A par C_E^A , et aussi parfois par $\bar{A}$.

$$C_E^A = \{x \in E / x \notin A\}$$



• Exemple

- 1 $C_{\mathbb{N}}^{\{0\}} = \mathbb{N}^*$.
- 2 $C_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N}^*} = \mathbb{Z}^-$.
- 3 $C_E^\emptyset = E$.
- 4 $\overline{\overline{A}} = A$.
- 5 Si $A = \{a; b\}$ et $E = \{a; b; c; d; e\}$
alors : $C_E^A = \{c; d; e\}$.

Propriété

Soit E un ensemble et soient A et B deux parties de E . On a : $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

EXEMPLES

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \notin B \Rightarrow x \notin A) \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}.$$

Application

On considère les deux ensembles : $A = \{x \in \mathbb{R} / |x+1| > 3\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} / \frac{|x|}{1+x^2} \leq 2\}$.

- 1 Écrire en compréhension $\overline{A}$ et $\overline{B}$, les complémentaires respectivement de A et de B dans $\mathbb{R}$.
- 2 Montrer que : $\overline{A} \subset \overline{B}$

3 Intersection d'ensembles

Définition

Soit E un ensemble et soient A et $B \in \mathcal{P}(E)$.

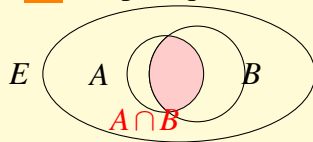
On appelle intersection de A et de B et on note $A \cap B$ l'ensemble $\{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$

• Exemple

- 1 Soient D_{12} et D_{16} respectivement l'ensemble des diviseurs de 12 et celui de 16.
On a $D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$ et $D_{16} = \{1; 2; 4; 8; 16\}$. Donc $D_{12} \cap D_{16} = \{1; 2; 4\}$
- 2 Soit $A = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$ et soit $B = \{3n, n \in \mathbb{N}\}$. On a $A \cap B = \{6n, n \in \mathbb{N}\}$.

Remarque

- 1 $A \cap B$ est constitué des éléments communs à l'ensemble A et à l'ensemble B .
- 2 En pratique on a : $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$



Propriété

Soit E un ensemble.

Soient A, B et $C \in \mathcal{P}(E)$. On a :

- 1 $A \cap B \in \mathcal{P}(E)$
- 2 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- 3 $A \cap E = E \cap A = A$
- 4 $A \cap B = B \cap A$
- 5 $A \cap \emptyset = \emptyset$
- 6 $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$
- 7 $A \cap A = A$
- 8 $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$
- 9 $A \cap \bar{A} = \emptyset$

Application

Considérons les deux ensembles : $C = \left\{ \frac{-\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3} ; k \in \mathbb{Z} \right\}$ et $D = \left\{ \frac{-\pi}{3} + \frac{k\pi}{3} ; k \in \mathbb{Z} \right\}$.
Montrer que $C \cap D = \emptyset$.

Définition

Soit E un ensemble et soient A et $B \in \mathcal{P}(E)$.

On dit que A et B sont disjoints si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

4

Réunion d'ensembles

Définition

Soit E un ensemble et soient A et $B \in \mathcal{P}(E)$.

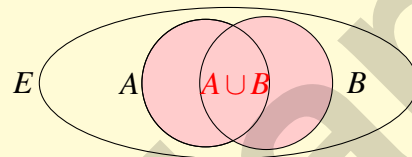
On appelle réunion (ou plus simplement union) de A et de B et on note $A \cup B$ l'ensemble défini par : $\{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$

• Exemple

- 1 Soit $A = \{a; b; c; d\}$ et soit $B = \{x; b; y; d; z\}$.
On a $A \cup B = \{a; b; c; d; x; y; z\}$
- 2 Soit $I = [2, 8[$ et soit $J = [-1, 3]$.
On a $I \cup J = [-1, 8[$

Remarque

- 1 $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$
- 2 $A \cup B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \wedge B = \emptyset$



Propriété

Soit E un ensemble. Soient A, B et $C \in \mathcal{P}(E)$. On a :

- 1 $A \cup B \in \mathcal{P}(E)$
- 2 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- 3 $A \cup \emptyset = \emptyset \cap A = A$
- 4 $A \cup B = B \cup A$
- 5 $A \cup E = E$
- 6 $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$
- 7 $A \cup A = A$
- 8 $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$
- 9 $A \cup \bar{A} = E$

5

Distributivité et lois de De Morgan

Propriété

Soit E un ensemble et soient A, B et $C \in \mathcal{P}(E)$. On a :

- 1 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- 2 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- 3 $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- 4 $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$

EXEMPLES

- $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \cap C$
 $\Leftrightarrow x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C)$
 $\Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C)$
 $\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \text{ et } (x \in A \cup C)$
 $\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

D'où $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B \cup C$
 $\Leftrightarrow x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C)$
 $\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C)$
 $\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \text{ ou } (x \in A \cap C)$
 $\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

D'où $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- $x \in \overline{(A \cap B)} \Leftrightarrow x \notin A \cap B$
 $\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B$
 $\Leftrightarrow x \in \bar{A} \text{ ou } x \in \bar{B}$
 $\Leftrightarrow x \in \bar{A} \cup \bar{B}$

D'où $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

- $x \in \overline{(A \cup B)} \Leftrightarrow x \notin A \cup B$
 $\Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B$
 $\Leftrightarrow x \in \bar{A} \text{ et } x \in \bar{B}$
 $\Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}$

D'où $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Application

Soient A , B et C des parties de l'ensemble E .

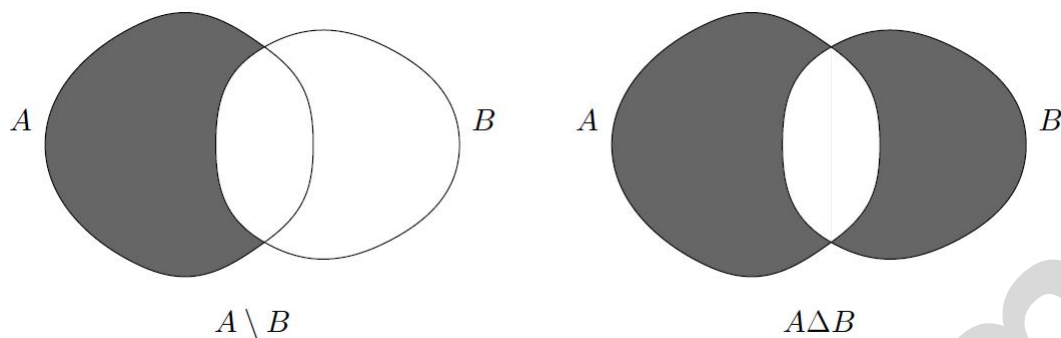
- 1 Montrer que : $A \subset B \Rightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.
- 2 Montrer que : $A \cup B \subset [(A \cap C) \cup (B \cap \bar{C})]$.

6 Différence et différence symétrique de deux ensembles

Définition

Soit E un ensemble, $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(E)$. On note :

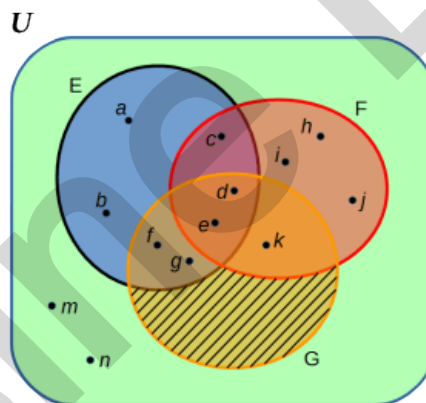
- 1 L'ensemble A privé de B noté $A \setminus B$ est défini par $\{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$ et on l'appelle différence de A et B .
- 2 $A \triangle B$ l'ensemble $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ et on l'appelle différence symétrique de A et B .



• Exemple

On considère les deux ensembles $A = \{1; 2; 5; 6; 9; 10\}$ et $B = \{2; 3; 5; 7; 8; 9\}$.

- 1 $A \setminus B = \{1; 6; 10\}$.
- 2 $A \Delta B = \{1; 3; 6; 7; 8; 10\}$.
- 3 Dans le référentiel U représenté ci dessous, on a : $E \Delta F = \{a, b, f, g, h, i, j, k\}$



Remarque

- 1 La différence symétrique correspond au "ou" exclusif $A \Delta B$ est : l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B , mais PAS à A et B en même temps.
- 2 Si $B \subset A$ alors la différence de A et B est aussi le complémentaire de B dans A .
- 3 $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
- 4 $A \subset B$ si et seulement si $A \setminus B = \emptyset$
- 5 La différence symétrique $A \Delta B$ est aussi égale à $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Étant données A , B et C trois parties d'un ensemble E , montrer que :

Application

- 1 $A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$.
- 2 $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B$.
- 3 $A \Delta B = A \cap B \Rightarrow A = B = \emptyset$

7

Produit cartésien

a

Produit cartésien de deux ensembles**Définition**

Soient E et F deux ensembles. On appelle produit cartésien (ou simplement produit) de E par F et on note $E \times F$ l'ensemble des couples ordonnés $(x; y)$ où $x \in E$ et $y \in F$.

$$A \times B = \{(x; y) / x \in A \text{ et } y \in B\}$$

avec la convention : $A \times B = \emptyset$ si $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$

Attention : l'ordre des éléments dans le couple est important : $(2; 3) \neq (3; 2)$

Exemple

Soit $A = \{1; 3\}$ et $B = \{2; 3; 6\}$. Alors, $A \times B = \{(1; 2); (1; 3); (1; 6); (3; 2); (3; 3); (3; 6)\}$

On note : $A^2 = A \times A$ (appelé carré cartésien de A).

Remarque

- 1 $u \in E \times F \Leftrightarrow \exists x \in E \text{ et } \exists y \in F / u = (x; y)$
- 2 On définit l'égalité sur $E \times F$ par : $(x; y) = (x'; y') \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'$
- 3 $E \times F = \emptyset \Leftrightarrow E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset$

Application

A , B et C sont des trois parties d'un ensemble non vide E , montrer que :

- 1 $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
- 2 $C_{E \times E}^{A \times B} = (C_E^A \times E) \cup (C_E^B \times E)$

b

Produit cartésien de trois ensembles

Définition

Le produit cartésien de trois ensembles est défini par :

$$A \times B \times C = \{(a; b; c) / a \in A ; b \in B \text{ et } c \in C\}$$

Le produit $A \times A \times A$ est appelé cube cartésien de A et il est noté A^3 .

Les définitions précédentes se généralisent en définissant le produit cartésien d'une famille d'ensembles $(A_1; A_2; \dots; A_n)$ que l'on note habituellement $\prod_{i=1}^n A_i$

$$\prod_{i=1}^n A_i = \{(a_1; a_2; \dots; a_n) / a_1 \in A_1 ; a_2 \in A_2 ; \dots \text{ et } a_n \in A_n\}$$