



Série d'exercices

Exercice

1

Écrire en extension les ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / |x-1| \leq 5\}$$

$$B = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2; 0 < 2xy < 7\}$$

$$C = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 / (x+y)(x-y) = 24\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{N} / \frac{2x+6}{x-1} \in \mathbb{N}\}$$

Exercice

1 On considère les ensembles E et F telles que :

$$E = \left\{x \in \mathbb{R} / \left|1 - \frac{x}{2}\right| \leq 1\right\} \text{ et } F = [0; 4]$$

Montrer que : $E = F$ 2 On considère les ensembles A et B telles que

$$A = \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\right\} \text{ et } B = \left\{\frac{-7\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Montrer que $A = B$

Exercice

1 Écrire en extension $\mathcal{P}(E)$ dans les cas suivants ; $E = \{1\}$; $E = \{1; 4\}$ et $E = \{a; b; c\}$

2 On pose

$$E = \{-1; -2; -3; 1; 2; 3; 4; 7; 8; 9; 10\}$$

$$A = \{1; 2; 3; -1; -2; 9; 10\}$$

et

$$B = \{1; 2; -1; -2; 7; 8\}$$

Déterminer en extension $A \cap B; A \cup B; \bar{A} \cup \bar{B}; \bar{A} \cap \bar{B}; A \setminus B; B \setminus A; A \triangle B$ et $B \triangle A$

Exercice

- 1 On pose

$$A = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ et } B = \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Montrer que $A \cap B = \emptyset$

- 2 On pose : $C = \{(n; n^2) / n \in \mathbb{N}\}$ et $D = \{(2n; n) / n \in \mathbb{N}\}$

Déterminer $C \cap D$

Exercice

On pose dans $\mathbb{N}$: $A = \left\{ n \in \mathbb{N} / \frac{4n^2 - 4n + 10}{2n - 1} \in \mathbb{N} \right\}$ et $B = \left\{ n \in \mathbb{N} / \frac{n+10}{n-5} \in \mathbb{N} \right\}$

- 1 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} / \{5\}; \frac{n+10}{n-5} = 1 + \frac{15}{n-5}$

- 2 Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{4n^2 - 4n + 10}{2n - 1} = 2n - 1 + \frac{9}{2n - 1}$$

- 3 Déterminer en extension $A; B; A \cap B; A \cup B$

$A \setminus B; B \setminus A$ et $A \triangle B$

Exercice

On pose : $F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$ et

$$E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - 2y^2 - xy = 0\}$$

- 1 Montrer que : $E \neq \emptyset$ et $F \subset E$.
- 2 Déterminer un réel y sachant que $(1; y) \in E$.
- 3 A-t-on $E = F$? Justifier.

4) Déterminer un ensemble G vérifiant $E = F \cup G$

Exercice

Soient E et F deux ensembles

- 1 Montrer que : $E \subset F \Leftrightarrow \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$
- 2 Montrer que : $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
- 3 Soient E et F deux ensembles :
- 4 a) Montrer que : $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$

b) Montrer que la réciproque est fausse

Exercice

Soient A ; B ; C et D des parties d'un ensemble E

- 1 Montrer que :

$$A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$$

- 2 Montrer que :

$$A \subset B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$$

- 3 Vérifier que : $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

- 4 Montrer que :

- 5 Montrer que :

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$

- 6 Montrer que :

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$[(B \setminus C) \subset A \text{ et } (C \setminus D) \subset A] \Rightarrow (B \setminus D) \subset A$$

Exercice

Soient A ; B ; C et D des parties d'un ensemble E 1) Montrer que :

- 2 Montrer que

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

$$\overline{A} \Delta \overline{B} = A \Delta B$$

3 Montrer que :

4 Montrer que :

$$(A \Delta B = A \Delta C) \Rightarrow (B = C)$$

$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$$

Exercice

Soient A ; B ; C et D des parties d'un ensemble E

1 Montrer que :

2 Montrer que :

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

3 Montrer que :

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

$$(A \times B = C \times D) \Rightarrow (A = C \text{ et } B = D)$$

E 