

Les application

Capacités attendues

- 1 Déterminer l'image et l'image réciproque d'un ensemble par une application ;
- 2 Déterminer la bijection et la bijection réciproque d'une application et son utilisation dans la résolution de problèmes ;
- 3 Déterminer la composée de deux applications et la décomposition d'une application en deux applications en vue d'explorer ses propriétés ;

Recommandations pédagogiques

- 1 la réorganisation, le renforcement des connaissances des élèves, ses applications au cours de l'année
- 2 l'investissement de résultats de ce cours chaque fois que l'occasion se offre dans les prochains chapitres.

Contenus

- 1 Égalité de deux applications ;
- 2 Image et image réciproque d'une partie par une application ;
- 3 Restriction et prolongement d'une application ;
- 4 Application injective, application surjective ; application bijective ; application réciproque d'une bijection ;
- 5 Composée de deux applications ;

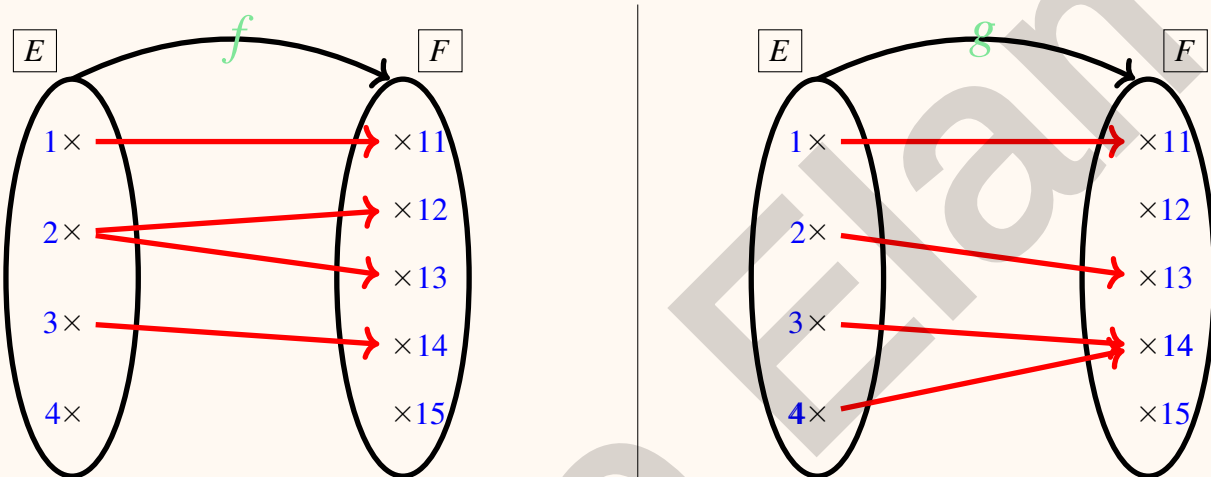


Généralités

1 Application d'un ensemble vers un autre

Activité

On considère les ensembles $E = \{1; 2; 3; 4\}$ et $F = \{10; 11; 12; 13; 14\}$, et on considère la relation f (ou g) qui associe les éléments de E par les élément de F , voir figures (**diagramme sagittale**).



Que remarquez vous ?

$\Rightarrow f$ n'est pas une application de E vers F .

$\Rightarrow g$ est une application de E vers F .

Définition

Soient E et F deux ensembles non vides. Toute relation f qui associe **chaque élément x de E** par un et un **seul élément y de F** est appelée application de E vers F , on le note par :

$$f : E \longrightarrow F$$

$$x \longrightarrow y = f(x)$$

Vocabulaire

- 1 L'ensemble E est appelé **L'ensemble de départ** de l'application f .
- 2 L'ensemble F est appelé **l'ensemble d'arrivé** de l'application f .
- 3 $y = f(x)$ s'appelle **l'image** de x
- 4 $y = f(x)$; x s'appelle **l'antécédent** de y

Remarque

- 1 Toute fonction est une application de son ensemble de définition D_f vers $\mathbb{R}$
- 2 Tout application $f : E \longleftrightarrow F$ est une fonction $f : E \longrightarrow F$
- 3 f est une application de E vers $F \iff (\forall x \in E) \quad (\exists ! y \in F) : f(x) = y$

Exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \{-1; 1\} \\ n &\longrightarrow (-1)^n \end{aligned}$$

est une application de $\mathbb{N}$ vers $\{-1; 1\}$.

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \frac{1}{x} \end{aligned}$$

n'est pas une application car 0 n'a pas d'image

Application

- 1 On considère la fonction numérique h définie par

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \sqrt{1-x} \end{aligned}$$

- a La fonction h est-elle une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse.
- b Déterminer un ensemble E pour que la fonction h soit une application de E vers $\mathbb{R}$.
- 2 On considère les ensembles $E = \{-\sqrt{3}; -1; 0; \sqrt{3}\}$ et $F = \{0; 1; 3\}$
 - a Définir une application de E vers F
 - b Définir une application de F vers E

2 Égalité de deux applications

Activité

Soient les deux applications suivantes :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ n &\longrightarrow (-1)^n \cdot n \end{aligned}$$

vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) : f(n) = g(n)$

et

$$\begin{aligned} g : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ n &\longrightarrow \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ -n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : E' \longrightarrow F'$ deux applications, on dit que f et g sont **égaux** et on écrit $f = g$ si :

- 1 $E = E'$ et $F = F'$
- 2 $(\forall x \in E) : f(x) = g(x)$

Exemple

Soit f et g deux applications définies par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \sqrt{4x^2 - 4x + 1} - \sqrt{4x^2 - 12x + 9}$$

et

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow 2 \left(\left| x - \frac{1}{2} \right| + \left| x - \frac{3}{2} \right| \right)$$

On montre facilement que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = g(x)$. Puisque f et g ont le même ensemble de départ et même ensemble d'arrivée et $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

Application

Dans chacun des cas suivants, montrer que f et g sont égaux.

1

$$f :]0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \frac{2}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}$$

et

$$f :]0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

2

$$f :]0; \pi[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$$

et

$$f :]0; \pi[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$$

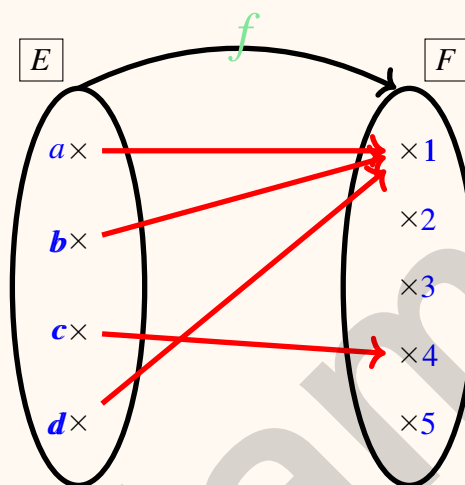
3

Image directe et Image réciproque d'une partie d'un ensemble

Activité

Soit l'application dont le diagramme sagittal est représenté ci-contre

- 1 Déterminer les images directes des éléments des ensembles $\{a; b; c\}$, $\{a; c\}$ et E .
- 2 Déterminer les antécédents des éléments qui appartiennent aux ensembles $\{1\}$, $\{1; 3\}$ et $\{1; 4\}$.



Activité

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow 2x^2 - x \end{aligned}$$

- 1 Montrer que : $(\forall x \in [-1; 1]) : f(x) \in \left[-\frac{3}{16}; 3\right]$
- 2 Montrer que : $(\forall y \in \left[-\frac{3}{16}; 3\right]) (\exists x \in [-1; 1]) f(x) = y$

$\Rightarrow$ On dit que l'intervalle $\left[-\frac{3}{16}; 3\right]$ est l'image de l'intervalle $[-1; 1]$ par l'application f , et on écrit :

$$f([-1; 1]) = \left[-\frac{3}{16}; 3\right]$$

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Pour toute partie A de E , on définit l'**image directe** de A par f noté $f(A)$ et définie par.

$$f(A) = \{f(x) / x \in A\}$$

on écrit :

$$(\forall y \in F) : y \in f(A) \Leftrightarrow (\exists x \in A) : y = f(x)$$

• Exemple

- 1 Soit f l'application définie par :

$$\begin{aligned} f : [0; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = x^2 + 2 \end{aligned}$$

- a Déterminer $f(A)$ où $A = \{-1; 0; 2; 4\}$ et $A = [1; 2]$
- b Montrons que $f([0; +\infty[) = [2; +\infty[$

- 2 Soit g l'application définie par :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longrightarrow g(x) = 2n \end{aligned}$$

Déterminer $f(A)$ où $A = \{0; 1; 2; 5\}$ et $A = \mathbb{N}$.

Application

- 1 On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

- a vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}$
 b Montrer que $f(\mathbb{R}) = [\frac{7}{4}; +\infty[$

- 2 On considère l'application

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} \setminus \{-1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \frac{3x-1}{x+1} \end{aligned}$$

- a vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}) : h(x) = 3 - \frac{4}{x+1}$
 b Déterminer $h(]-\infty; -1])$.

Propriété

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et A et B deux parties de E ($A, B \subset E$), on a :

- | | |
|--|----------------------------------|
| 1 $f(A) \subset F$ | 4 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ |
| 2 $A = \emptyset \Leftrightarrow f(A) = \emptyset$ | 5 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ |
| 3 $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$ | |

EXEMPLES

- 1 Puisque $f : E \longrightarrow F$ est une application et $A \subset E$. Alors $f(A)$ est une partie de F , c-à-d $f(A) \subset F$.
 2 (évident)
 3 On suppose que $A \subset B$ et on montre que $f(A) \subset f(B)$
 soit $y \in f(A)$, on a $y \in f(A) \iff (\exists x \in A) : y = f(x)$ (1)
 (1) $\implies (\exists x \in B) : y = f(x)$ car $(A \subset B)$
 par suite $y = f(x) \in f(B)$
 finalement $f(A) \subset f(B)$
 4 on a $A \subset A \cup B$

alors $f(A) \subset f(A \cup B)$ (d'après 2)

et on a $B \subset A \cup B$

alors $f(B) \subset f(A \cup B)$ (d'après 2)

d'où :

$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B) \quad (*)$$

Réciproquement, montrons que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

soit $y \in f(A \cup B)$ alors $\exists x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$

alors $\exists x \in A / y = f(x)$ ou $\exists x \in B / y = f(x)$

alors $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$

alors $y \in f(A) \cup f(B)$ d'où :

$$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B) \quad (**)$$

de (*) et (**), on déduit que :

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

5 on a $A \cap B \subset A$, alors $f(A \cap B) \subset f(A)$ (d'après 3).

et on a $A \cap B \subset B$, alors $f(A \cap B) \subset f(B)$ (d'après 3).

d'où

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Pour toute partie B de F , on définit l'**image réciproque** de B par f , noté $f^{-1}(B)$ par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$$

on a donc :

$$(\forall x \in E) : x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$$

Exemple

1 Considérons l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = x^2 \end{aligned}$$

► $f^{-1}(\{1\}) = \{-1; 1\}$ car $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow (x = 1 \vee x = -1)$

► $f^{-1}(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$ car $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

► $f^{-1}(\mathbb{R}_*) = \emptyset$ car l'inéquation $f(x) < 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

► de même on peut montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}_-) = \{0\}$, $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $f^{-1}[0; 2] = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

2 Soit l'application définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = x^2 + 2 \end{aligned}$$

Montrer que $f^{-1}([6; 11]) = [2; 3]$

Soit $x \in [0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
 x \in f^{-1}([6; 11]) &\iff 6 \leq f(x) \leq 11 \\
 &\iff 6 \leq f(x) \leq 11 \\
 &\iff 6 \leq x^2 + 2 \leq 11 \\
 &\iff 4 \leq x^2 \leq 9 \\
 &\iff \sqrt{4} \leq \sqrt{x^2} \leq \sqrt{9} \\
 &\iff 2 \leq |x| \leq 3 \\
 &\iff 2 \leq x \leq 3 \quad (x \geq 0) \\
 &\iff x \in [2; 3]
 \end{aligned}$$

d'où : $f^{-1}([6; 11]) = [2; 3]$

Remarque

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et $B \subset F$

- 1 $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(F) = E$
- 2 $\forall y \in F : f^{-1}(\{y\}) = \{x \in E / f(x) = y\}$
- 3 $f^{-1}(B) = \emptyset$ ne signifie pas que $B = \emptyset$

Exemple

Soit g l'application définie par :

$$\begin{aligned}
 g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 x &\longrightarrow \sin(x)
 \end{aligned}$$

Déterminer $g^{-1}([2; 3])$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
 x \in g^{-1}([2; 3]) &\iff g(x) \in [2; 3] \\
 &\iff 2 \leq \sin(x) \leq 3
 \end{aligned}$$

ce qui est impossible (car $(\forall x \in \mathbb{R}) : \sin(x) \in [-1; 1]$).

D'où $g^{-1}([2; 3]) = \emptyset$ mais $[2; 3]$ n'est pas vide.

Propriété

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et A et B deux parties de F ($A, B \subset F$), on a :

$$1 \quad f^{-1}(A) \subset E$$

$$2 \quad A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$$

$$3 \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

$$4 \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

EXEMPLES

1 Puisque $f : E \longrightarrow F$ est une application et $A \subset F$. Alors $f^{-1}(A)$ est une partie de E , c-à-d $f^{-1}(A) \subset E$.

2 On suppose que $A \subset B$ et on montre que $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

$$\begin{aligned} \text{soit } x \in f^{-1}(A) &\iff f(x) \in A \\ &\iff f(x) \in B \quad (\text{car } A \subset B) \\ &\iff x \in f^{-1}(B) \end{aligned}$$

D'où

$$f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$$

3 Soit $x \in E$

$$\begin{aligned} \text{on a } x \in f^{-1}(A \cup B) &\iff f(x) \in A \cup B \\ &\iff f(x) \in A \quad \text{ou} \quad f(x) \in B \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \quad \text{ou} \quad x \in f^{-1}(B) \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \end{aligned}$$

D'où

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

4 Soit $x \in E$

$$\begin{aligned} \text{on a } x \in f^{-1}(A \cap B) &\iff f(x) \in A \cap B \\ &\iff f(x) \in A \quad \text{et} \quad f(x) \in B \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \quad \text{et} \quad x \in f^{-1}(B) \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \end{aligned}$$

D'où

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

Application

1 Considérons l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x^2 - 2x \end{aligned}$$

Déterminer $f^{-1}([-1;0])$ et $f^{-1}([2;+\infty[)$

2 Considérons l'application

$$g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow 2 + \frac{1}{x}$$

Déterminer $f^{-1}([1;2])$ et $f^{-1}([7;+\infty[)$



Restriction d'une application- prolongement d'une fonction

1 Restriction d'une application

Activité

Considérons l'application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow x^2 + |x - 1|$$

1 Déterminer l'expression de f à $[1;+\infty[$

2 Déterminer l'expression de f à $] -\infty; 1]$

Vocabulaire

l'application

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow x^2 + x - 1$$

restreint à donner les images des x de $[1;+\infty[$; pour cela l'application h est appelé **restriction de f sur $[1;+\infty[$** .

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et $A \subset E$.

On appelle **restriction** de f à la partie A l'application g définie par :

$$g : A \longrightarrow F$$

$$x \longrightarrow f(x)$$

On a alors :

$$A \subset E \quad \text{et} \quad (\forall x \in A) : g(x) = f(x)$$

• Exemple

1 Soit l'application

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow 2x + |x - 2|$$

a La restriction de f à $] -\infty; 2]$ est l'application

$$g :] -\infty; 2] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow x + 2$$

b La restriction de f à $[2; +\infty[$ est l'application

$$h : [2; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow 3x - 2$$

2 On considère l'application f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{3x^2}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a La restriction de f à $] -\infty; 0[$ est l'application

$$g :] -\infty; 0[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \frac{3x^2}{x}$$

b La restriction de f à $[0; +\infty[$ est l'application

$$h : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow x^2 + 2x - 1$$

2

Prolongement d'une application

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et $E \subset G$.On appelle **prolongement** de f à la partie G , toute application $g : G \longrightarrow F$ telle que :

$$(\forall x \in E) : g(x) = f(x)$$

• Exemple

Soit f et g deux applications définies par

$$f : [1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow x^2$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow x^2|1 - x| + x^3$$

Montrer que g est un prolongement de f

▷ **Réponse** : On a $[1; +\infty[\subset \mathbb{R}$ et pour tout $x \in [1; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2(1-x) + x^3 \\ &= x^2 - x^3 + x^3 \\ &= x^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

D'où g est un prolongement de f à $\mathbb{R}$

Remarque

La restriction d'une application à une partie est unique mais en générale plusieurs prolongement possible d'une application à un même ensemble.

Application

On considère les deux applications :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = |x| - 5x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : [0; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow g(x) = -4x \end{aligned}$$

Est-ce que l'application g est une restriction de f sur $[0; +\infty[$



Injectivité - Surjectivité - Bijectivité et la Bijection réciproque

1

Application injective

Définition

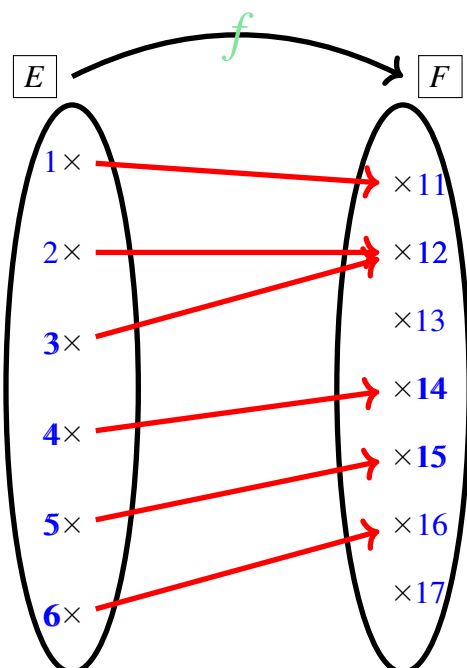
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

f est appelée **application injective (ou f est une injection)** si et seulement si pour chaque élément y de F a au plus un antécédent x de l'ensemble de départ E .

Ou encore :

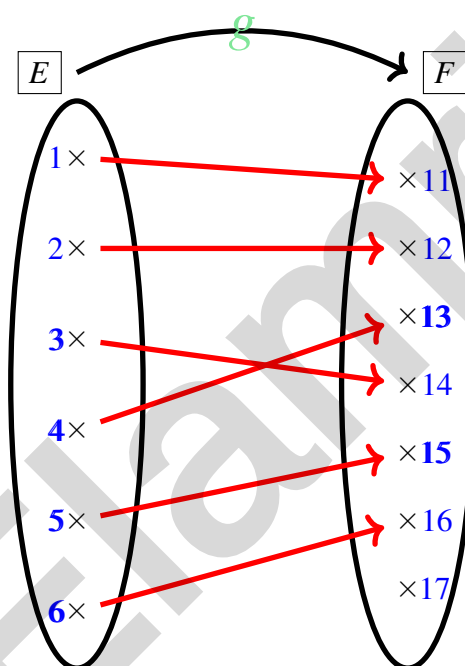
$$f \text{ est injective} \iff \forall (x_1, x_2) \in E^2 : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

• Exemple



► ♦ L'application f est-elle injective ?

► ♦ L'application g est-elle injective ?



Remarque

1 Par contraposition :

$$f \text{ est injective} \iff \forall (x_1, x_2) \in E^2 : x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

2 Par la négation :

$$f \text{ n'est pas injective} \iff \exists (x_1, x_2) \in E^2 : f(x_1) = f(x_2) \quad \text{et} \quad x_1 \neq x_2$$

• Exemple

Soit l'application

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow g(x) = x^2 - 4 \end{aligned}$$

Montrer que g est non injective.

▷ Réponse :

on a : $g(2) = g(-2) = 0$ mais $2 \neq -2$

D'où g n'est pas injective.

• Exemple

Soit l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longrightarrow \sqrt{x} + x \end{aligned}$$

Montrer que f est injective.

▷ **Réponse :**

Soit $x_1 \in \mathbb{R}^+$ et $x_2 \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\implies x_1 + \sqrt{x_1} = x_2 + \sqrt{x_2} \\ &\implies x_1 - x_2 + \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 0 \\ &\implies \sqrt{x_1}^2 - \sqrt{x_2}^2 + \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 0 \\ &\implies (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) + \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 0 \\ &\implies \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 1 = 0 \\ &\implies \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 0 \quad (\text{car } \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 1 = 0) \\ &\implies \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \\ &\implies x_1 = x_2 \end{aligned}$$

D'où f est une application injective.

Application

1 On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x^2 + 5x + 2 \end{aligned}$$

a Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -4$.

b f est-elle injective ?

2 On considère l'application

$$\begin{aligned} g : [1; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x^2 - 2x + 3 \end{aligned}$$

Montrer que g est injective.

3 On considère l'application

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow h((x, y)) = (x, 0) \end{aligned}$$

Est-ce que l'application h est injective ?

2 Application surjective

Définition

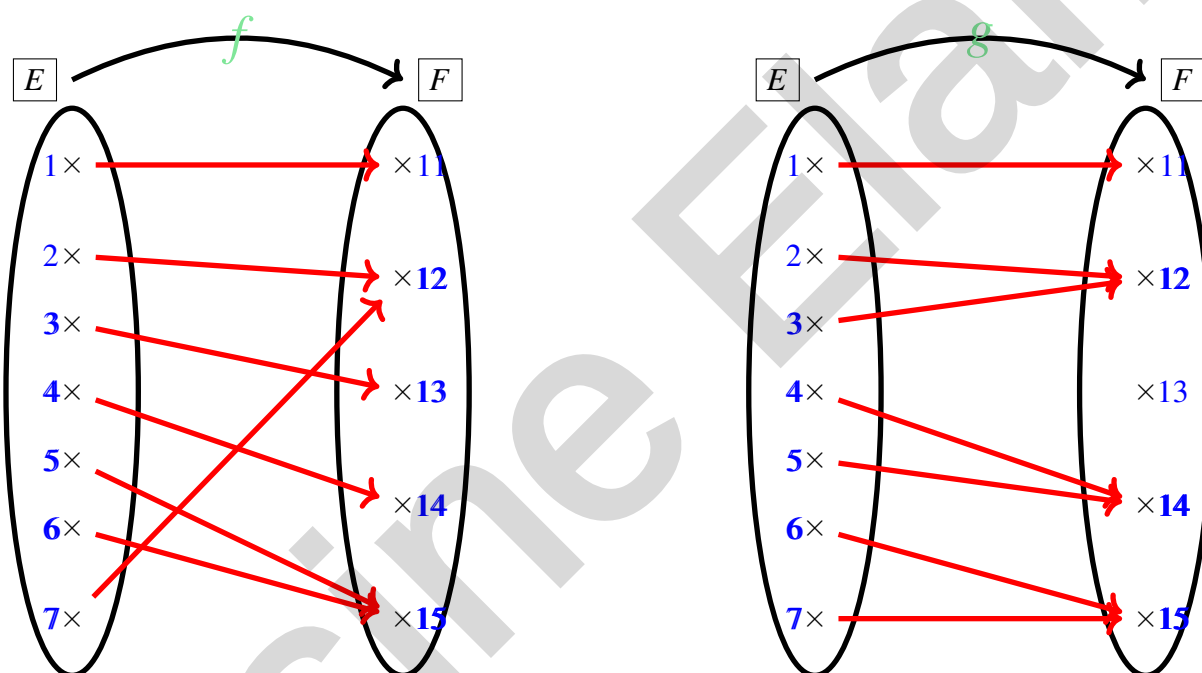
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

f est appelée **application surjective** (ou f est une **surjection**) si et seulement si pour chaque élément y de F a au moins un antécédent x de l'ensemble de départ E .

Ou encore :

$$f \text{ est surjective} \iff (\forall y \in F : \exists x \in E : y = f(x))$$

Exemple



► ♦ L'application f est-elle surjective ?

► ♦ L'application g est-elle surjective ?

Remarque

Pour démontrer que f est surjective, il suffit de démontrer que l'équation $x \in E : f(x) = y$ admet au moins une solution x dans E pour tout y de F . (l'inconnue est x mais y représente les éléments de F).

Exemple

On considère l'application

$$f :]1; +\infty[\longrightarrow]2; +\infty[$$

$$x \longmapsto \frac{2x}{x-1}$$

Montrer que f est surjective

▷ **Réponse :**

Soit $y \in]1; +\infty[$, résoudre dans l'intervalle $]1; +\infty[$ l'équation : $f(x) = y$
on a

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{2x}{x-1} \\ &\iff y(x-1) = 2x \\ &\iff yx - y = 2x \\ &\iff yx - 2x = y \\ &\iff x(y-2) = y \\ &\iff x = \frac{y}{y-2} \quad (\text{car } y \neq 2) \end{aligned}$$

il reste à montrer que $x \in]1; +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} x &= \frac{y}{y-2} \\ &= \frac{y-2+2}{y-2} \\ &= 1 + \frac{y}{y-2} \end{aligned}$$

puisque $y \in]2; +\infty[$, Alors $y > 2$

alors $y-2 > 0$

alors $\frac{1}{y-2} > 0$

alors $\frac{2}{y-2} > 0$

alors $1 + \frac{2}{y-2} > 1$

alors $x > 1$ (c-à-d $x \in]1; +\infty[$)

d'où l'équation $y = f(x)$ admet une solution dans l'intervalle $x \in]1; +\infty[$. Alors f est surjective.

• Exemple

On considère l'application

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x^2 + 3 \end{aligned}$$

1 Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}) : h(x) > 3$

2 On déduire que h n'est pas surjective.

▷ **Réponse :**

Propriété

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, Alors :

$$f \text{ est surjective} \iff f(E) = F$$

EXEMPLES

$f(E) = F$ signifie que $(\forall y \in F) (\exists x \in E) : y = f(x)$
c'est la définition d'une application surjective

Application

1 Soit l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x^2 - 4x + 3 \end{aligned}$$

Montrons que f est surjective

2 On considère l'application

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow g((x, y)) = (x, 0) \end{aligned}$$

Est ce que g est surjective ?

3 L'application

$$\begin{aligned} f :]0; +\infty[&\longrightarrow]0; +\infty[\\ x &\longrightarrow x + \frac{4}{x} \end{aligned}$$

Est ce que g est surjective ?

3 Application bijective-Application réciproque

Définition

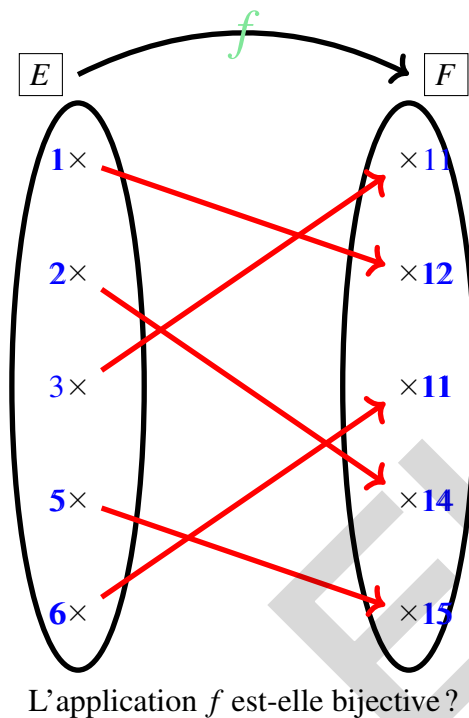
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

f est appelée **application bijective** (ou f est une **bijection**) si et seulement si pour chaque élément y de F admet un **unique** antécédent x de l'ensemble de départ E .

Autrement dit :

$$f \text{ est bijective} \iff (\forall y \in F : \exists ! x \in E : y = f(x))$$

• Exemple



Remarque

Pour démontrer que f est bijective, il suffit de démontrer que l'équation $x \in E : f(x) = y$ admet une **unique** solution x dans E pour tout y de F . (l'inconnue est x mais y représente les éléments de F).

• Exemple

On considère l'application

$$f :]1; +\infty[\longrightarrow]0; +\infty[\\ x \longmapsto \frac{1}{x-1}$$

Monter que f est bijective.

▷ Réponse :

Soit $y \in]0; +\infty[$ résolvons l'équation $f(x) = y$ dans $]1; +\infty[$

On a :

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{1}{x-1} = y \\ &\iff x-1 = \frac{1}{y} \\ &\iff x = 1 + \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Puisque $y \in]0; +\infty[$ donc $y > 0$, alors $\frac{1}{y} > 0$. D'où $1 + \frac{1}{y} > 1$

Alors $x > 1$ par suite $x \in]1; +\infty[$

D'où l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans $]1; +\infty[$.

D'où f est une bijection de $]1; +\infty[$ vers $]0; +\infty[$

Propriété

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective et surjective}$$

EXEMPLES

Dire que f est injective et surjective signifie que tout élément de F admet au plus et au moins un antécédent (en même temps) dans E ; ce qui signifie que tout élément de F admet exactement un antécédent dans E .

Dans la pratique pour démontrer qu'une application est bijective, le plus élémentaire est de prouver qu'elle est injective et surjective à la fois. Sinon on peut montrer que :

$$(\forall y \in F) : (\exists ! x \in E) : y = f(x)$$

Application

Soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $] -1; 1[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{|x| + 1}$$

- 1 Montrer que f est injective.
- 2 Montrer que f est surjective.
- 3 En déduire que f est bijective

Définition

Si f est une bijection de E dans F ; l'application de F dans E qui lie chaque élément y par l'élément x de E qui est solution unique de l'équation $f(x) = y$ s'appelle **la bijection réciproque** de la bijection f et se note f^{-1} .

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in E \end{cases} \iff \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in F \end{cases}$$

• Exemple

Soit f une application définie par :

$$\begin{aligned} f :]1; +\infty[&\longrightarrow]0; +\infty[\\ x &\longrightarrow \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

d'après l'exemple président, on montre que f est une bijection de $]1; +\infty[$ vers $]0; +\infty[$, alors son application réciproque est donnée par :

$$\begin{aligned} f^{-1} :]0; +\infty[&\longrightarrow]1; +\infty[\\ x &\longrightarrow 1 + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Application

On considère l'application

$$\begin{aligned} f :]1; +\infty[&\longrightarrow]2; +\infty[\\ x &\longrightarrow x^2 - 2x + 3 \end{aligned}$$

- 1 Montrer que f est bijective
- 2 Déterminer f^{-1} la bijection réciproque de f

Remarque

Attention à ne pas confondre image réciproque d'une partie par l'application f (celle-ci existe toujours) et application réciproque f^{-1} (qui n'existe que si f est bijective).

• Exemple

Considérons l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = x^2 \end{aligned}$$

f n'admet pas d'application réciproque sur $\mathbb{R}$, mais $\mathbb{R}$ a une image réciproque par f (il s'agit de

$\mathbb{R}$).

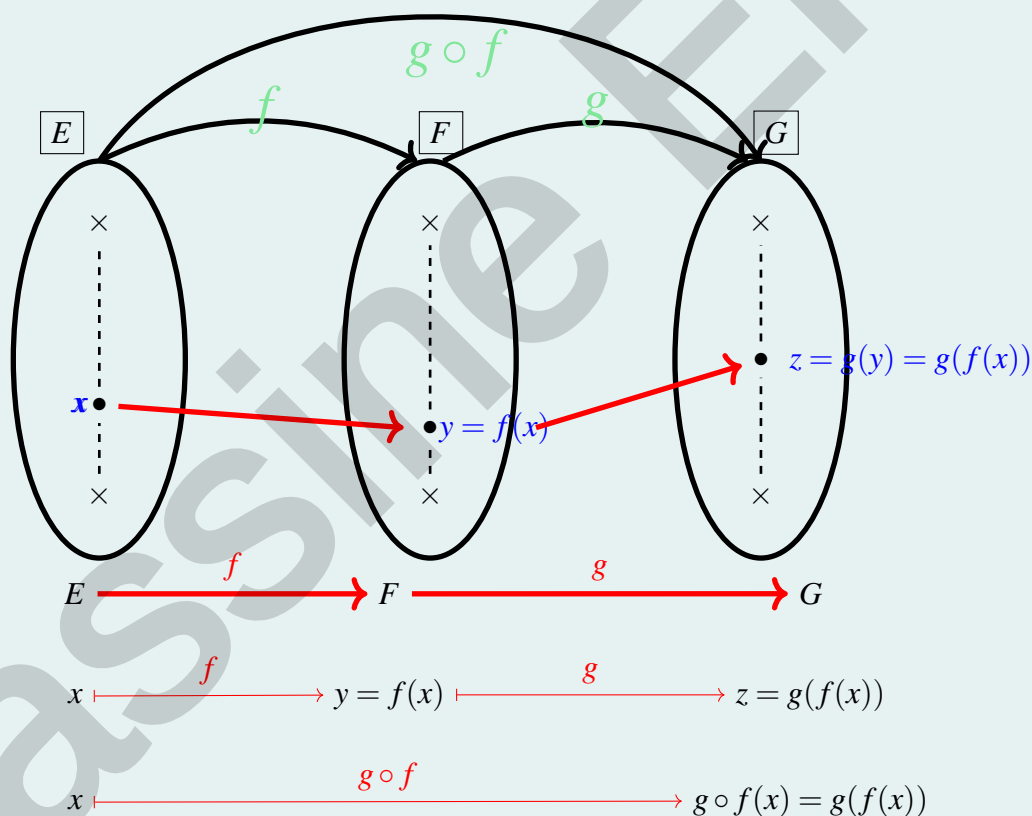
IV compositions des application

Définition

On considère les deux applications : $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$. L'application $h : E \longrightarrow G$ définies par : $(\forall x \in E) : h(x) = g(f(x))$ est appelée **la composée de f et g** dans cet ordre, et on note par : $g \circ f$ on a alors :

$$h = g \circ f : E \longrightarrow G$$

$$x \longrightarrow h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$$



Exemple

On considère les deux applications

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x^2 + 3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x - 1 \end{aligned}$$

▷ Réponse :

► Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 3) = x^2 + 3 - 1 = x^2 + 2$$

► Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x - 1) = (x - 1)^2 + 3 = x^2 - 2x + 1 + 3 = x^2 - 2x + 4$$

Remarque

- 1 La composée de deux application n'est pas toujours commutative : $f \circ g \neq g \circ f$
- 2 La composée des applications est associative : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, on peut écrire $f \circ g \circ h$

Application

On considère les applications

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longrightarrow x^2 + 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \sqrt{x} + 2 \end{aligned}$$

Déterminer $f \circ g$, $g \circ f$ et $f \circ f$

Propriété

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications :

- 1 Si f et g sont injectives, alors l'application $g \circ f : E \longrightarrow G$ est injective.
- 2 Si f et g sont surjectives, alors l'application $g \circ f : E \longrightarrow G$ est surjective
- 3 Si f et g sont bijectives, alors l'application $g \circ f : E \longrightarrow G$ est bijective, et on a :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

- 4 Si l'application f est bijective alors :

a $(\forall x \in E) : f^{-1} \circ f(x) = x$

b $(\forall x \in F) : f \circ f^{-1}(x) = x$

EXEMPLES

1 Supposons que f et g sont injectives. on a pour tout x_1 et x_2 de E , on a :

$$\begin{aligned} g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) &\implies g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\implies f(x_1) = f(x_2) \quad (\text{car } g \text{ est injective}) \\ &\implies x_1 = x_2 \quad (\text{car } f \text{ est injective}) \end{aligned}$$

D'où l'application $g \circ f$ est une injection de E dans G

2 Supposons que f et g sont surjectives, alors :

$$f(E) = F \quad \text{et} \quad g(F) = G$$

on a donc :

$$\begin{aligned} g \circ f(E) &= g(f(E)) \\ &= g(F) \quad (\text{car } f \text{ est surjective}) \\ &= G \quad (\text{car } g \text{ est surjective}) \end{aligned}$$

D'où l'application $g \circ f$ est une surjection de E dans G .

Remarque

Soit f une application bijective de E dans F et f^{-1} son application réciproque, alors :

$$f^{-1} \circ f = Id_E \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = Id_F$$

où Id_E est l'application identique de E et Id_F est l'application identique de F définies par :

$$\begin{aligned} Id_E : E &\longrightarrow E \\ x &\longrightarrow x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Id_F : F &\longrightarrow F \\ x &\longrightarrow x \end{aligned}$$

Application

1 On considère les deux applications :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow 4x^3 - 2x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$

2 On considère l'application suivante :

$$h : [0; 2] \longrightarrow [0; 2]$$
$$x \longrightarrow h(x) = (\sqrt{2} - \sqrt{x})^2$$

- a Monter que h est une application bijective
- b Calculer $f \circ f(x)$ puis on déduit l'application réciproque f^{-1} de l'application f

Exercice

Considérons l'application :

$$h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$$
$$x \longrightarrow x + \sqrt{x} + \frac{1}{4}$$

- 1 Écrire l'application h comme la composée de deux application f et g telle que $h = g \circ f$
- 2
 - a Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.
 - b Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.
 - c En déduire que h est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$ et déterminer sa bijection réciproque h^{-1}