Chapitre

Développement et factorisation

I Rappel vocabulaire

1 Expression algébrique

Définition

On appelle expression algébrique, toute expression qui contient à la fois des chiffres et des lettres

EXEMPLES

★ $A = 2x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \sqrt{3}x + 1$

★ $B = \left(2x^2 + 3\right)(-4x - 1)$

2 Expression numérique

Définition

On appelle expression numérique, toute expression ne contenant que des chiffres

EXEMPLES

★ $C = 2\sqrt{7} + \frac{1}{2} - 11.5 + 17$

★ $D = \left(2\sqrt{3} - \frac{11}{3}\right)\left(11 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{7}} + 1\right)$

3 Somme algébrique

Définition

On appelle somme algébrique, toute expression algébrique ne contenant aucune parenthèse et écrite sous la forme d'une suite d'addition et de soustraction de nombres

EXEMPLES

★ $E = 3x^2 + x\sqrt{3} - 11$

★ $F = \sqrt{2}x^5 - 4x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x + \sqrt{7}$

4 Réduire (Simplifier) une expression algébrique

Définition

Réduire une expression algébrique, c'est la simplifier en regroupant les termes qui se ressemblent du plus petit au plus grand

Exemples

$$G = 3x^2-2x+4-5x^2+1+7x+x^3 = x^3+3x^2-5x^2-2x+7x+4+1 = x^3-2x^2+5x+5$$

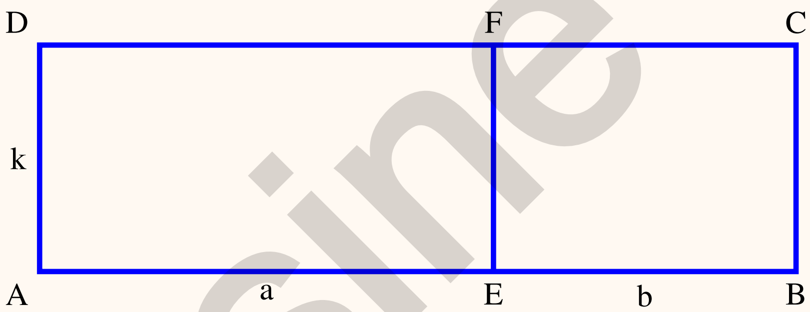
$$H = 3x-2x^3+2x+x^3-11-5x+7 = -2x^3+x^3+3x+2x-5x-11+7 = -x^3-4$$

II Développement et factorisation

1 Activité

Activité

Soient $ABCD$ et $AEFD$ deux rectangles tel que : $AB = k$, $AE = a$ et $BE = b$



1. Calculer l'aire de chacun des rectangles $AEFD$ et $EBCF$ et $ABCD$
2. Déduire que : $k\times(a+b) = k\times a+k\times b$

Solution

1.
 - ★ L'aire du rectangle $AEFD$ est : $S_1 = AE\times AD = k\times a$
 - ★ L'aire du rectangle $EBCF$ est : $S_2 = EF\times EB = k\times b$
 - ★ L'aire du rectangle $ABCD$ est : $S_3 = AB\times AD = k\times(a+b)$

2. L'aire du triangle $ABCD$ est la somme des aires des triangles $AEFD$ et $EBCF$
Donc : $S_3 = S_1+S_2$
Alors : $S_3 = k\times a+k\times b$
D'ou : $k\times(a+b) = k\times a+k\times b$

2 Développement

a Définition

Définition

Le développement est l'écriture d'un produit sous forme d'une somme ou différence

b Règle

Règle

k, a et b sont des nombres réels

★ $k\times(a+b)=k\times a+k\times b$ | ★ $k\times(a-b)=k\times a-k\times b$

Exemples

$$\begin{aligned} A &= 2x(x+4) \\ &= 2x\times x+2x\times 4 \\ &= 2x^2+8x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (-3x-5)\times(-4x) \\ &= -3x\times(-4x)-3x\times(-4x) \\ &= 12x^2+20x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 3x\left(2x^2-x+2\right)-5\times\left(3x^2+4x-5\right) \\ &= 6x^3-3x^2+6x-15x^2-20x+25 \\ &= 6x^3-3x^2-15x^2+6x-20x+25 \\ &= 6x^3-18x^2-14x+25 \end{aligned}$$

c Règle

Règle

a, b, c et d sont des nombres réels

$$\begin{aligned} (a+b)\times(c+d) &= a\times(c+d)+b\times(c+d) \\ &= ac+ad+bc+bd \end{aligned}$$

Exemples

$$\begin{aligned} A &= \left(3\sqrt{2}-1\right)\times\left(2+\sqrt{2}\right)=3\sqrt{2}\times\left(2+\sqrt{2}\right)-1\times\left(2+\sqrt{2}\right) \\ &= 3\sqrt{2}\times 2+3\sqrt{2}\times\sqrt{2}-2-\sqrt{2} \quad = \quad 6\sqrt{2}+3\times 2-2-\sqrt{2} \\ &= 6\sqrt{2}+6-2-\sqrt{2} \quad = \quad 6\sqrt{2}-\sqrt{2}+6-2 \quad = \quad 5\sqrt{2}+4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (2-x)\times(3x+1) \quad = \quad 2\times(3x+1)-x\times(3x+1) \\ &= 2\times 3x+2\times 1-x\times 3x-x\times 1 \quad = \quad 6x+2-3x^2-x \\ &= -3x^2+6x-x+2 \quad = \quad -3x^2+5x+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 3x\times(2x+1)+(3x-2)\times(x+7) \quad = \quad 3x\times(2x+1)+3x\times(x+7)-2\times(x+7) \\ &= 3x\times 2x+3x\times 1+3x\times x+3x\times 7-2\times x-2\times 7 \quad = \quad 6x^2+3x+3x^2+21x-2x-14 \\ &= 6x^2+3x^2+3x+21x-2x-14 \quad = \quad 9x^2+22x-14 \end{aligned}$$

3 Factorisation

a Définition

Définition

La factorisation est l'écriture d'une somme ou différence sous forme d'un produit

Règle

k, a et b sont des nombres réels

★ $k\times a+k\times b=k\times(a+b)$

★ $k\times a-k\times b=k\times(a-b)$

Remarque

Pour factoriser une expression algébrique, on cherche un facteur commun, après on simplifie l'intérieur des parenthèses

Exemples

➘ Cas 1 : facteur commun sans parenthèse

$$\begin{aligned} A &= 2\sqrt{3}x-\sqrt{6}x^2\\ &= 2\sqrt{3}x-\sqrt{2}x\times\sqrt{3}x\\ &= \sqrt{3}x\left(2-\sqrt{3}x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 3x^2-9x\\ &= 3x\times x-3x\times 3\\ &= 3x\times(x-3) \end{aligned}$$

➘ Cas 2 : facteur commun avec parenthèse

$$\begin{aligned} C &= (2x+1)(5-x)-(2x+1)(7x+3)\\ &= (2x+1)[(5-x)-(7x+3)]\\ &= (2x+1)(5-x-7x-3)\\ &= (2x+1)(2-8x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= (x+3)^2+2x(x+3)-(x+3)\\ &= (x+3)(x+3)+2x(x+3)-(x+3)\\ &= (x+3)(x+3+2x-1)\\ &= (x+3)(3x+2) \end{aligned}$$

➘ Cas 3 : factorisation double

$$\begin{aligned} E &= 7(x-1)+2x^2-2x\\ &= 7(x-1)+2x(x-1)\\ &= (x-1)(7+2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= -4x^2+2x7\left(-2x^3+x^2\right)\\ &= 2x(-2x+1)+x^2(-2x+1)\\ &= (1-2x)\left(2x+x^2\right) \end{aligned}$$

III Identités remarquables

1 Propriétés

Propriété

a et b sont deux nombres réels

Développement

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$$

Factorisation

2 exemples

EXEMPLES

Identités remarquables et développement

- $A = (x+1)^2 = x^2+2\times x\times 1+1^2 = x^2+2x+1$
- $B = (2x+3)^2 = (2x)^2+2\times 2x\times 3+3^2 = 4x^2+12x+9$
- $C = (x-5)^2 = x^2-2\times x\times 5+5^2 = x^2-10x+25$
- $D = (5-7x)^2 = 5^2-2\times 5\times(7x)+(7x)^2 = 25-70x+49x^2$
- $E = \left(2x-\sqrt{5}\right)\left(2x+\sqrt{5}\right) = (2x)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2 = 4x^2-5$
- $F = \left(2\sqrt{7}x-3\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{7}x+3\sqrt{5}\right) = \left(2\sqrt{7}x\right)^2-\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 28x^2-45$

Identités remarquables et factorisation

- $A = x^2+6x+9 = x^2+2\times x\times 3+3^2 = (x+3)^2$
- $B = 25x^2+30x+9 = (5x)^2+2\times 5x\times 3+3^2 = (5x+3)^2$
- $C = x^2-4x+4 = x^2-2\times x\times 2+2^2 = (x-2)^2$
- $D = 49x^2-56x+16 = (7x)^2-2\times(7x)\times 4+4^2 = (7x-4)^2$
- $E = 144x^2-49 = (12x)^2-7^2 = (12x-7)(12x+7)$

➠ $F = 16x^2 - \frac{1}{4} = (4x)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(4x - \frac{1}{2}\right)\left(4x + \frac{1}{2}\right)$

➘ Identités remarquables et double factorisation

➠ $$\begin{aligned} A &= 4x^2+4x+1-(10x+5) &= (2x)^2+2\times 2x\times 1+1^2-5(2x+1)\\ &= (2x+1)^2-5(2x+1) = (2x+1)(2x+1-5) &= (2x+1)(2x-4)\end{aligned}$$

➠ $$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2}\left(-x^2-x\right)(2x-8)+x^2-8x+16 = \frac{1}{2}\times 2\left(-x^2-x\right)(x-4)+x^2-2\times x\times 4+4^2\\ &= \left(-x^2-x\right)(x-4)+(x-4)^2 = (x-4)\left(-x^2\cancel{-x}+\cancel{x}-4\right)\\ &= (x-4)\left(-x^2-4\right) = -(x-4)\left(x^2+4\right)\end{aligned}$$

➠ $$\begin{aligned} C &= (3x-1)^2-(2-x)^2 = [(3x-1)-(2-x)][(3x-1)+(2-x)]\\ &= (3x-1-2+x)(3x-1+2-x) = (4x-3)(2x+1)\end{aligned}$$

3 Exercice d'application

Application

1 Développer et simplifier

$$A = (2x+1)^2-(3x+5)(3x-5)$$
$$B = (7-2x)^2+4x(1-x)$$

2 Factoriser ce qui suit

$$C = 25x^2-4+(5x-2)(5x+7)$$
$$D = 9x^2-6x+1+5x(3x-1)$$

Solution

1 Développons et simplifions

$$\begin{aligned} A &= (2x+1)^2-(3x+5)(3x-5)\\ &= (2x)^2+2\times 2x\times 1+1^2-\left((3x)^2-5^2\right)\\ &= 4x^2+4x+1-9x^2+25\\ &= 4x^2-9x^2+4x+1+25\\ &= -5x^2+4x+26\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (7-2x)^2+4x(1-x)\\ &= 7^2-2\times 7\times 2x+(2x)^2+4x\times 1-4x\times x\\ &= 49-28x+4x^2+4x-4x^2\\ &= \cancel{4x^2}-\cancel{4x^2}-28x+4x+49\\ &= -24x+49\end{aligned}$$

2 Factorisons

$$\begin{aligned} C &= 25x^2-4+(5x-2)(5x+7)\\ &= (5x)^2-2^2+(5x-2)(5x+7)\\ &= (5x-2)(5x+2)(5x-2)(5x+7)\\ &= (5x-2)(5x+2+5x+7)\\ &= (5x-2)(1x+9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 9x^2-6x+1+5x(3x-1)\\ &= (3x)^2-2\times 3x\times 1+1^2+5x(3x-1)\\ &= (3x-1)^2+5x(3x-1)\\ &= (3x-1)(3x-1+5x)\\ &= (3x-1)(8x-1)\end{aligned}$$